اختبار نهاية الوحدة صفحة 65	
1	$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx$ $= \int (x - x^{-2})dx$ $= \frac{1}{2}x^2 + x^{-1} + C$ $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C \ldots\ldots\ldots.(b)$
2	$\int_0^2 kx\,dx = 6 \quad \Rightarrow \frac{k}{2}x^2\Big\|_0^2 = 6$ $\Rightarrow \frac{k}{2}(2)^2 - \frac{k}{2}(0)^2 = 6$ $\Rightarrow 2k = 6$ $\Rightarrow k = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$
3	$\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_0^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{9}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$
4	$\int_0^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big\|_0^2$ $= \frac{1}{2}e^{2(2)} - \frac{1}{2}e^{2(0)}$ $= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$

5	$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ $= 2x^{\frac{1}{2}}\Big\|_1^4$ $= 2\sqrt{x}\Big\|_1^4$ $= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}$ $= 2$ ... ... (d)
6	$f(x) = 4x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 4x - x^2 = 0$ $\implies x(4 - x) = 0$ $\implies x = 0\,, x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 4]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 4(1) - (1)^2 = 3 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 4]$ والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$
7	$\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C$
8	$\int (8x - 10x^2)dx = 4x^2 - \frac{10}{3}x^3 + C$
9	$\int \frac{5}{x^3}\,dx = \int 5x^{-3}\,dx$ $= -\frac{5}{2}x^{-2} + C$ $= -\frac{5}{2x^2} + C$

10	$\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^2-1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ $= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx$ $= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$ $= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$ $= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$
11	$\int (5x^2 - 2e^{7x})dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{7}e^{7x} + C$
12	$\int (2x + 3e^{4x+5})dx = x^2 + \frac{3}{4}e^{4x+5} + C$
13	$\int \frac{x^2-6}{2x}dx = \int \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{6}{2x}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{x}\right)dx$ $= \frac{1}{4}x^2 - 3\ln\|x\| + C$
14	$\int \frac{1}{(x-1)^3}dx = \int (x-1)^{-3}dx$ $= -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C$ $= -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$
15	$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\|e^x+4\| + C$

16	$\int 2xe^{x^2-1}dx$ $u = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x}$ $\int 2xe^{x^2-1}dx = \int 2xe^u \times \dfrac{du}{2x}$ $= \int e^u du$ $= e^u + C$ $= e^{x^2-1} + C$
17	$\int 4e^x(3 + e^{2x})dx = \int (12e^x + 4e^{3x})dx$ $= 12e^x + \dfrac{4}{3}e^{3x} + C$
18	$\int \dfrac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx$ $u = 4 + 2x + x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2 + 2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2+2x}$ $\int \dfrac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx = \int \dfrac{1+x}{u^8} \times \dfrac{du}{2+2x}$ $= \int \dfrac{1+x}{u^8} \times \dfrac{du}{2(1+x)}$ $= \int \dfrac{1}{2}u^{-8}du$ $= -\dfrac{1}{14}u^{-7} + C$ $= -\dfrac{1}{14}(4+2x+x^2)^{-7} + C$ $= -\dfrac{1}{14(4+2x+x^2)^7} + C$

19	$\int x\sin(3+x^2)\,dx$ $u=3+x^2 \quad \Longrightarrow \frac{du}{dx}=2x$ $\Longrightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $\int x\sin(3+x^2)\,dx=\int x\sin u\times\frac{du}{2x}$ $=\int\frac{1}{2}\sin u\,du$ $=-\frac{1}{2}\cos u+C$ $=-\frac{1}{2}\cos(3+x^2)+C$
20	$\int(3\sin 3x-4\cos x)dx=-\cos 3x-4\sin x+C$
21	$\int(x-\sin(7x+2))dx=\int xdx-\int\sin(7x+2)\,dx$ $=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{7}\cos(7x+2)+C$
22	$\int(e^{3x}-e^{-3x})dx=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+C$
23	$\int\frac{2}{1-5x}dx=\int\frac{\frac{2}{-5}(-5)}{1-5x}dx$ $=-\frac{2}{5}\int\frac{-5}{1-5x}dx$ $=-\frac{2}{5}\ln\|1-5x\|+C$
24	$y=\int(4x-2)dx$ $=2x^2-2x+C$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,3)$ إذن: $3=2(0)^2-2(0)+C$ $C=3$ $y=2x^2-2x+3$

25	$R(x) = \int (4x - 1.2x^2)dx$ $= 2x^2 - 0.4x^3 + C$ بما أن $R(20) = 30000$ إذن: $30000 = 2(20)^2 - 0.4(20)^3 + C$ $C = 54000$ $R(x) = 2x^2 - 0.4x^3 + 54000$
26	$v(t) = \int \cos(3t - \pi)\, dx$ $= \frac{1}{3}\sin(3t - \pi) + C$
27	$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{5} f(x)dx$ $= -4 + 10$ $= 6$
28	$\int_{-5}^{-1} 7f(x)dx = 7\int_{-5}^{-1} f(x)dx$ $= 7 \times 4$ $= 28$
29	$\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))dx = 3\int_{-1}^{-5} f(x)dx - \int_{-1}^{-5} g(x)dx$ $= 3(-4) - (-11)$ $= -1$
30	$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)\Big\|_{-2}^{3}$ $= ((3)^3 - 2(3)^2 + 3) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 - 2)$ $= 30$

31	$\int_1^3 \frac{x^3+2x^2}{x}dx = \int_1^3 \left(\frac{x^3}{x}+\frac{2x^2}{x}\right)dx$ $= \int_1^3 (x^2+2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big\|_1^3$ $= \left(\frac{1}{3}(3)^3+(3)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2\right)$ $= \frac{50}{3}$
32	$\int_1^5 \|3-x\|dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\|3-x\| = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_1^5 \|3-x\|dx = \int_1^3 (3-x)dx + \int_3^5 (x-3)dx$ $= \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big\|_3^5$ $= \left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)-\left(3(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right)+\left(\frac{1}{2}(5)^2-3(5)\right)-\left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)$ $= 4$
33	$\int_1^4 \frac{20}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 20x^{-\frac{1}{2}}dx$ $= 40x^{\frac{1}{2}}\Big\|_1^4$ $= 40\sqrt{x}\Big\|_1^4$ $= 40\sqrt{4}-40\sqrt{1}$ $= 40$

34	$\int_2^5 3x(x+2)dx = \int_2^5 (3x^2+6x)dx$ $= (x^3+3x^2)\Big\|_2^5$ $= ((5)^3+3(5)^2) - ((2)^3+3(2)^2)$ $= 180$
35	$\int_2^3 2xe^{-x^2}dx$ $u = -x^2 \quad \Longrightarrow \dfrac{du}{dx} = -2x$ $\Longrightarrow dx = \dfrac{du}{-2x}$ $x = 3 \quad \Longrightarrow u = -9$ $x = 2 \quad \Longrightarrow u = -4$ $\int_2^3 2xe^{-x^2}dx = \int_{-4}^{-9} 2xe^u \times \dfrac{du}{-2x}$ $= \int_{-4}^{-9} -e^u du$ $= -e^u \Big\|_{-4}^{-9}$ $= -e^{-9} + e^{-4}$ $= -\dfrac{1}{e^9} + \dfrac{1}{e^4}$

36	$\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5} dx$ $u = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$ $x = 2 \quad \Rightarrow u = 9$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 1$ $\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5} dx = \int_1^9 \frac{3x^2}{u^5} \times \frac{du}{3x^2}$ $= \int_1^9 u^{-5} du$ $= -\frac{1}{4} u^{-4} \Big\|_1^9$ $= -\frac{1}{4u^4} \Big\|_1^9$ $= -\frac{1}{4(9)^4} + \frac{1}{4(1)^4}$ $= \frac{1640}{6561}$
37	$\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{3(2x)}{x^2+1} dx$ $= 3\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$ $= 3 \ln\|x^2+1\| \Big\|_0^1$ $= 3 \ln\|2\| - 3 \ln\|1\|$ $= 3 \ln 2$

38	بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (x^2+4)dx + \int_{0}^{1} (4-x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big\|_{-2}^{0} + \left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{0}^{1}$ $= (0) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3+4(-2)\right) + \left(4(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right) - (0)$ $= \frac{85}{6}$
39	$v(t) = 5+e^{t-2}$ $s(t) = \int (5+e^{t-2})dt$ $= 5t+e^{t-2}+C$ $s(t) = 5t+e^{t-2}+C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن $s(0) = 0$: $s(0) = 5(0)+e^{0-2}+C$ $0 = e^{-2}+C$ $C = -e^{-2}$ $C = -\frac{1}{e^2}$ $\Rightarrow s(t) = 5t+e^{t-2}-\frac{1}{e^2}$ موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من الحركة هو: $s(3) = 5(3)+e^{3-2}-\frac{1}{e^2}$ $= 15+e-\frac{1}{e^2}\ m$

40	$f(x)=\int(3x^2+6x-2)dx$ $=x^3+3x^2-2x+C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,6)$ إذن: $6=(0)^3+3(0)^2-2(0)+C$ $C=6$ $f(x)=x^3+3x^2-2x+6$
41	$f(x)=\int\frac{\sqrt{20}}{x^2}dx$ $=\int\sqrt{20}x^{-2}dx$ $=-\sqrt{20}x^{-1}+C$ $=-\frac{\sqrt{20}}{x}+C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1,400)$ إذن: $400=-\frac{\sqrt{20}}{1}+C$ $C=400+\sqrt{20}$ $f(x)=-\frac{\sqrt{20}}{x}+400+\sqrt{20}$
42	$f(x)=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $=\int\left(\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx$ $=2\ln\lvert x\rvert-x^{-1}+C$ $=2\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{x}+C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1,1)$ إذن: $1=2\ln\lvert 1\rvert-\frac{1}{1}+C$ $C=2$ $f(x)=2\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{x}+2$

43	$f(x) = \int (5e^x - 4)\,dx$ $= 5e^x - 4x + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, -1)$ إذن: $-1 = 5e^0 - 4(0) + C$ $C = -6$ $f(x) = 5e^x - 4x - 6$
44	$f(x) = \int x\sqrt{x^2+5}\,dx$ $u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx = \int x u^{\frac{1}{2}} \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du$ $= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(2, 10)$ إذن: $10 = \frac{1}{3}\sqrt{((2)^2+5)^3} + C$ $C = 1$ $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + 1$

45	$f(x) = x^2 - x - 2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$ $\Rightarrow x = -1 , x = 2$ نختار عددًا ضمن الفترة $[-2, -1]$، وليكن -1.5 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = (-1.5+1)(-1.5-2) = 1.75 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-2, -1]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = (0+1)(0-2) = -2 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 1]$ العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله $A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - x - 2)dx$ $= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx + \int_{-1}^{1} (-x^2 + x + 2)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big\|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big\|_{-1}^{1}$ $= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$ $= \frac{31}{6}$ إذن، المساحة هي: $\frac{31}{6}$ وحدة مربعة.

أولًا نجد تكامل الاقتران:

$$C(t)=\int\frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}dt$$

$$u=t^2+36 \Rightarrow \frac{du}{dt}=2t$$

$$\Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$$

$$C(t)=\int\frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}dt$$

$$=\int\frac{3t}{\sqrt{u^3}}\times\frac{du}{2t}$$

$$=\int\frac{3}{2}u^{-\frac{3}{2}}du$$

$$=-3u^{-\frac{1}{2}}+K$$

46

$$=-\frac{3}{\sqrt{u}}+K$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{t^2+36}}+K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0)=0$ ومنه:

$$C(t)=-\frac{3}{\sqrt{t^2+36}}+K$$

$$C(0)=-\frac{3}{\sqrt{0+36}}+K$$

$$0=\frac{1}{2}+K$$

$$K=-\frac{1}{2}$$

$$C(t)=-\frac{3}{\sqrt{t^2+36}}-\frac{1}{2}$$

$$C(8)=-\frac{3}{\sqrt{64+36}}-\frac{1}{2}=-\frac{8}{10}$$

	مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو $-0.8\ mg/cm^2$
47	$f(x) = 3x^2 - 3x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0$ $\Rightarrow 3x(x-1) = 0$ $\Rightarrow x = 0 , x = 1$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[0,1]$، وليكن $\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0,1]$ $A = -\int_0^1 (3x^2 - 3x)dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3x)dx$ $= \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_0^1$ $= \left(-(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2\right) - \left(-(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{1}{2}$ إذن، المساحة هي: $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

48	$A = -\int_{-3}^{-1}(x^2+4x+3)dx + \int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)dx$ $= \int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)dx + \int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x\right)\Big\|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right)\Big\|_{-1}^{0}$ $= \left(\frac{1}{3}-2+3\right)-(9-18+9)+(0)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)$ $= \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.
49	$A = \int_{0}^{1}x^3dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_{0}^{1}$ $= \left(\frac{1}{4}(1)^4\right)-\left(\frac{1}{4}(0)^4\right)$ $= \frac{1}{4}$ إذن، المساحة هي: $\frac{1}{4}$ وحدة مربعة.
50	$A = -\int_{0}^{2}-x^2dx$ $= \int_{0}^{2}x^2dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3\right)-\left(\frac{1}{3}(0)^3\right)$ $= \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

51	$A = -\int_{-1}^{0} xe^{x^2}dx + \int_{0}^{2} xe^{x^2}dx$ $= \int_{-1}^{0} -xe^{x^2}dx + \int_{0}^{2} xe^{x^2}dx$ $u = x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2x$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{2x}$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 0$ $x = -1 \quad \Rightarrow u = 1$ $x = 2 \quad \Rightarrow u = 4$ $A = \int_{1}^{0} -xe^{u} \times \frac{du}{2x} + \int_{0}^{4} xe^{u} \times \frac{du}{2x}$ $= \int_{1}^{0} -\frac{1}{2}e^{u}du + \int_{0}^{4} \frac{1}{2}e^{u}du$ $= \left(-\frac{1}{2}e^{u}\right)\Big\|_{1}^{0} + \left(\frac{1}{2}e^{u}\right)\Big\|_{0}^{4}$ $= \left(-\frac{1}{2}e^{0}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{1}\right) + \left(\frac{1}{2}e^{4}\right) - \left(\frac{1}{2}e^{0}\right)$ $= -1 + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^{4}$ إذن، المساحة هي: $\left(-1 + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^{4}\right)$ وحدة مربعة.