الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

12

إجابات الطالب

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 | 06-5376266 | P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor | feedback@nccd.gov.jo | www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب للصف الثاني عشر الأدبي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة: التكامل

الدرس الأول: التكامل غير المحدود

مسألة اليوم صفحة 8	
	$f(x) = \int (3x^2 - 4x)dx = x^3 - 2x^2 + C$ لكن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,0)$ ، إذن: $C = 0$ ومنه فإن قاعدة الاقتران هي: $f(x) = x^3 - 2x^2$
أتحقق من فهمي صفحة 9	
a	$f(x) = 5x^4$ $G(x) = x^5 + C$
b	$f(x) = -9x^{-10}$ $G(x) = x^{-9} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 11	
a	$\int 6dx = 6x + C$
b	$\int x^8 dx = \frac{1}{8+1}x^{8+1} + C$ $= \frac{1}{9}x^9 + C$
c	$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx$ $= \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C$ $= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$ $= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

d	$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx$ $= -\frac{1}{4}x^{-4} + C$ $= -\frac{1}{4x^4} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 12
a	$\int \left(x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}\right)dx = \int x^3 dx - 2\int x^{\frac{5}{3}}dx$ $= \frac{1}{4}x^4 - 2\left(\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\right) + C$ $= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8} + C$
b	$\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right)dx = 3\int x^2 dx - 6\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx$ $= 3\int x^2 dx - 6\int x^{-\frac{1}{5}}dx$ $= x^3 - 6\left(\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right) + C$ $= x^3 - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^4} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 13
a	$\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{8x^3}{x^2}\right)dx$ $= \int (x^2 - 8x)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + C$
b	$\int (3x+2)(x-1)dx = \int (3x^2 - 3x + 2x - 2)dx$ $= \int (3x^2 - x - 2)dx$ $= x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

c	$\int x(x^3-7)dx = \int (x^4-7x)dx$ $= \frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + C$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 14
1	$f(x) = x^7$ $G(x) = \frac{1}{8}x^8 + C$
2	$f(x) = -2x^6$ $G(x) = -\frac{2}{7}x^7 + C$
3	$f(x) = -10$ $G(x) = -10x + C$
4	$f(x) = 8x$ $G(x) = 4x^2 + C$
5	$\int 6x\,dx = 3x^2 + C$
6	$\int (7x-5)\,dx = \frac{7}{2}x^2 - 5x + C$
7	$\int (3-4x)\,dx = 3x - 2x^2 + C$
8	$\int \frac{10}{\sqrt{x}}dx = \int 10x^{-\frac{1}{2}}dx$ $= 20x^{\frac{1}{2}} + C$ $= 20\sqrt{x} + C$
9	$\int 2x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
10	$\int (2x^4 - 5x + 10)dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 10x + C$
11	$\int (2x^3 - 2x)dx = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + C$

12	$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{x^3}\right)dx=\int\left(3x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx$ $=\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$
13	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int(x^{-2}-x^{-3})dx$ $=-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$
14	$\int\frac{4x^3-2}{x^3}dx=\int\left(\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx$ $=\int(4-2x^{-3})dx$ $=4x+x^{-2}+C=4x+\frac{1}{x^2}+C$
15	$\int\frac{2x+8}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right)dx$ $=\int\left(2x^{\frac{1}{2}}+8x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+16x^{\frac{1}{2}}+C$ $=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+16\sqrt{x}+C$
16	$\int(x-1)^2dx=\int(x^2-2x+1)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$
17	$\int\frac{x^3+8}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$ $=\int(x^2-2x+4)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$

18	$\int \sqrt{x}(x-1)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ $= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
19	$\int (2x-3)(3x-1)dx = \int (6x^2 - 2x - 9x + 3)dx$ $= \int (6x^2 - 11x + 3)dx$ $= 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + C$
20	$\int f(x) \times g(x)dx \neq \int f(x)dx \times \int g(x)dx$ $\int (2x+1)(x-1)dx = \int (2x^2 - 2x + x - 1)dx$ $= \int (2x^2 - x - 1)dx$ $= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$
21	$\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$ $= \int (1 + x^{-2})^2 dx$ $= \int (1 + 2x^{-2} + x^{-4})dx$ $= x - 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

22	$\int (x-1)(x-3)(x+5)dx = \int (x^2-3x-x+3)(x+5)dx$ $= \int (x^2-4x+3)(x+5)dx$ $= \int (x^3+5x^2-4x^2-20x+3x+15)dx$ $= \int (x^3+x^2-17x+15)dx$ $= \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{17}{2}x^2+15x+C$
23	$\int \left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \frac{2}{x}+10x+C$ $\int \left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \int \left(\frac{P}{2}x^{-2}+Q\right)dx$ $= -\frac{P}{2}x^{-1}+Qx+C$ $= -\frac{P}{2x}+Qx+C$ $\Longrightarrow -\frac{P}{2}=2$ و $Q=10$ $\Longrightarrow P=-4$ و $Q=10$

الدرس الثاني: الشرط الأولي

مسألة اليوم صفحة 15

$s(t) = \int 500\sqrt[4]{t}dt$

$= \int 500t^{\frac{1}{4}}dt$

$= 500 \times \frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + C \;= 400t^{\frac{5}{4}} + C$

بما أن $s(0) = 0$ ، إذن $C = 0$

ومنه $s(t) = 400\sqrt[4]{t^5}$

أتحقق من فهمي صفحة 16

$f(x) = \int (6x^2 + 5)dx$

$f(x) = 2x^3 + 5x + C$

$9 = 2(1)^3 + 5(1) + C$

$C = 2$

$f(x) = 2x^3 + 5x + 2$

أتحقق من فهمي صفحة 17

$C(x) = \int (0.3x^2 + 2x)dx$

$C(x) = 0.1x^3 + x^2 + K$

$2200 = 0.1(10)^3 + (10)^2 + K$

$2200 = 100 + 100 + K$

$K = 2000$

$C(x) = 0.1x^3 + x^2 + 2000$

أتحقق من فهمي صفحة 18

$s(t) = \int v(t)dt \;= \int (36t - 3t^2)dt \;= 18t^2 - t^3 + C$

$0 = 18(0)^2 - (0)^3 + C$

$C = 0$

$s(t) = 18t^2 - t^3$

$s(3) = 18(3)^2 - (3)^3$

$= 135$

إذن، موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: $135\ m$

أتحقق من فهمي صفحة 20

$$v(t) = \int a(t)dt$$

$$= \int (4t - 4)dt$$

$$= 2t^2 - 4t + C_1$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $5\ m/s$ ، فإن $v(0) = 5$ وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1

$$5 = 2(0)^2 - 4(0) + C_1$$

$$C_1 = 5$$

$$v(t) = 2t^2 - 4t + 5$$

$$s(t) = \int v(t)dt$$

$$= \int (2t^2 - 4t + 5)dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$$

$$0 = \frac{2}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 5(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

$$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t$$

$$s(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 5(3)$$

$$= 15$$

موقع الجسيم بعد 4 ثوان من بدء الحركة هو: $15\ m$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 20

1	$f(x) = \int (x-3)dx$ $= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ $9 = \frac{1}{2} \times (2)^2 - 3(2) + C$ $C = 13$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$
2	$f(x) = \int (x^2-4)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$ $7 = \frac{1}{3} \times (0)^3 - 4(0) + C$ $C = 7$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7$
3	$f(x) = \int (6x^2 - 4x + 2)dx$ $= 2x^3 - 2x^2 + 2x + C$ $9 = 2(1)^3 - 2(1)^2 + 2(1) + C$ $C = 7$ $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 7$

4	$f(x) = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2\right) dx$ $= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^2\right) dx$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 + C$ $11 = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}(4)^3 + C$ $C = 11$ $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 + 11$ $= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{12}x^3 + 11$
5	$f(x) = \int (x+2)^2 dx$ $= \int (x^2 + 4x + 4) dx$ $= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$ $7 = \frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 + 4(1) + C$ $C = \frac{2}{3}$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{2}{3}$

6	$f(x) = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x\right) dx$ $= \int \left(3x^{-\frac{1}{2}} - x\right) dx$ $= 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + C$ $= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$ $0 = 6\sqrt{4} - \frac{1}{2}(4)^2 + C$ $C = -4$ $f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 4$
7	$y = \int (0.4x + 3)dx$ $= 0.2x^2 + 3x + C$ $5 = 0.2(0)^2 + 3(0) + C$ $C = 5$ $y = 0.2x^2 + 3x + 5$

8	$f(x)=\int \frac{x^2+10}{x^2}dx$ $=\int \left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{10}{x^2}\right)dx$ $=\int (1+10x^{-2})dx$ $=x-10x^{-1}+C$ $=x-\frac{10}{x}+C$ $2=5-\frac{10}{5}+C$ $C=-1$ $f(x)=x-\frac{10}{x}-1$
9	$f(x)=\int (3x^2-3)dx$ $=x^3-3x+C$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,2)$ إذن: $2=(0)^3-3(0)+C$ $C=2$ $f(x)=x^3-3x+2$
10	$y=\int 4t^{-\frac{2}{3}}dt$ $=12t^{\frac{1}{3}}+C$ $=12\sqrt[3]{t}+C$ $30=12\sqrt[3]{8}+C$ $C=6$ $y=12\sqrt[3]{t}+6$

11	$y = 12\sqrt[3]{27} + 6$ $= 42$ إذن، نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه هو: $42\ cm$
12	$h(t) = \int \left(0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}\right) dt$ $= \int \left(0.2t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt$ $= 0.12t^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$ $= 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$ بما أن ارتفاع الشجرة عند زراعتها $2\ ft$، فإن $h(0) = 2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $2 = 0.12\sqrt[3]{(0)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(0)^3} + C$ $C = 2$ $h(t) = 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + 2$
13	$s(t) = \int v(t)dt$ $= \int (2t + 3)dt$ $= t^2 + 3t + C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $s(t) = t^2 + 3t + C$ $0 = (0)^2 + 3(0) + C$ $C = 0$ $s(t) = t^2 + 3t$ $s(3) = (3)^2 + 3(3)$ $= 18$ موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة هو: $18\ m$

14	$v(t) = \int a(t)dt$ $= \int t^2 dt$ $= \frac{1}{2}t^3 + C_1$ بما أن السرعة المتجهة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي $1\ m/s$ ، فإن $v(1) = 1$ وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 $1 = \frac{1}{2}(1)^3 + C_1$ $C_1 = \frac{1}{2}$ $v(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}$ $s(t) = \int v(t)dt$ $= \int \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}\right)dt$ $= \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم هو $3\ m$، فإن $s(0) = 3$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 $s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$ $3 = \frac{1}{8}(0)^4 + \frac{1}{2}(0) + C_2$ $C_2 = 3$ $s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + 3$ $s(2) = \frac{1}{8}(2)^4 + \frac{1}{2}(2) + 3$ $= 5$ موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $5\ m$

15	$v(t) = \int a(t)dt$ $= \int (9-2t)dt$ $= 9t - t^2 + C_1$ بما أن السرعة المتجهة الابتدائية هي $2\ m/s$ ، فإن $v(0) = 2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 $v(t) = 9t - t^2 + C_1$ $2 = 9(0) - (0)^2 + C_1$ $C_1 = 2$ $v(t) = 9t - t^2 + 2$ $s(t) = \int v(t)dt$ $= \int (9t - t^2 + 2)dt$ $= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$ بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 $s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$ $0 = \frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 + 2(0) + C_2$ $C_2 = 0$ $s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t$ $s(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)$ $= \frac{58}{3}$ موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $\frac{58}{3}\ m$

16	$f'(x) = ax + b$ $f(x) = \int (ax + b)dx$ $= \frac{a}{2}x^2 + bx + C$ ميل المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7 معناها: $f'(-2) = 7$ وكذلك $f(-2) = 8$ منحنى الاقتران يقطع محور y عند النقطة $(0, 18)$ معناه: $f(0) = 18$ $f'(-2) = 7 \quad \Rightarrow a(-2) + b = 7$ $\Rightarrow -2a + b = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $f(-2) = 8 \Rightarrow \frac{a}{2}(-2)^2 + b(-2) + C = 8$ $\Rightarrow 2a - 2b + C = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $f(0) = 18 \Rightarrow \frac{a}{2}(0)^2 + b(0) + C = 18$ $\Rightarrow C = 18$ نعوض قيمة C في المعادلة (2) فنحصل على: $2a - 2b + 18 = 8 \Rightarrow 2a - 2b = -10$ $\Rightarrow a - b = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$ نجمع طرفي المعادلتين (1) و(4) فنحصل على: $-a = 2 \Rightarrow a = -2$ نعوض قيمة a في المعادلة (4) فنحصل على: $b = 3$ قاعدة الاقتران هي: $f(x) = -x^2 + 3x + 18$

17	$f'(x) = 4 - \frac{100}{x^2}$ $f(x) = \int \left(4 - \frac{100}{x^2}\right) dx$ $= \int (4 - 100x^{-2}) dx$ $= 4x + 100x^{-1} + C$ $= 4x + \frac{100}{x} + C$ للاقتران f نقطة حرجة عن $(a, 10)$ إذن: $f'(a) = 0$ وكذلك $f(a) = 10$ $f'(a) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{100}{a^2} = 0$ $\Rightarrow 4 = \frac{100}{a^2}$ $\Rightarrow 4a^2 = 100$ $\Rightarrow a^2 = 25$ $\Rightarrow a = \pm 5$ لكن $a > 0$ إذن $a = 5$، ومنه $f(5) = 10$ $10 = 4(5) + \frac{100}{5} + C$ $\Rightarrow C = -30$ وتكون قاعدة الاقتران: $f(x) = 4x + \frac{100}{x} - 30$

الدرس الثالث: التكامل المحدود

<table>
<tr><td colspan="2">مسألة اليوم صفحة 22</td></tr>
<tr><td>$C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$
مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 دراجة إلى 600 دراجة شهريًا هو:
$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$
$f(600) - f(300) = \int_{300}^{600} \left(500 - \frac{x}{3}\right) dx$
$= \left(500x - \frac{x^2}{6}\right)\Big|_{300}^{600}$
$= \left(500(600) - \frac{(600)^2}{6}\right) - \left(500(300) - \frac{(300)^2}{6}\right)$
$= 105000$
إذن، عند زيادة الإنتاج من 300 إلى 400 دراجة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًا بمقدار
105000 دينار.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">أتحقق من فهمي صفحة 23</td></tr>
<tr><td>$\int_1^4 (8x - \sqrt{x})dx = \int_1^4 \left(8x - x^{\frac{1}{2}}\right) dx$
$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4$
$= \left(4x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4$
$= \left(4(4)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(4(1)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)$
$= \frac{166}{3}$</td><td>a</td></tr>
</table>

b	$\int_{-1}^{2}(1-x)(1+3x)dx = \int_{-1}^{2}(1+3x-x-3x^2)dx$ $= \int_{-1}^{2}(1+2x-3x^2)dx$ $= (x+x^2-x^3)\Big\|_{-1}^{2}$ $= (2+2^2-2^3)-(-1+(-1)^2-(-1)^3)$ $= -3$
أتحقق من فهمي صفحة 24	
	$\int_{0}^{k} 6x^2dx = 2$ $2x^3\Big\|_0^k = 2$ $2k^3 - 2(0)^3 = 2$ $2k^3 = 2$ $k^3 = 1$ $k = 1$
أتحقق من فهمي صفحة 26	
a	$\int_{-1}^{1}(f(x)+3h(x))dx = \int_{-1}^{1}f(x)dx + \int_{-1}^{1}3h(x)dx$ $= \int_{-1}^{1}f(x)dx + 3\int_{-1}^{1}h(x)dx$ $= 5+3(7)$ $= 26$
b	$\int_{-1}^{4}f(x)dx = \int_{-1}^{1}f(x)dx + \int_{1}^{4}f(x)dx$ $= \int_{-1}^{1}f(x)dx - \int_{4}^{1}f(x)dx$ $= 5-2$ $= 3$

c	$\int_{1}^{-1} 4h(x)dx = -\int_{-1}^{1} 4h(x)dx$ $= -4\int_{-1}^{1} h(x)dx$ $= -4(7)$ $= -28$
أتحقق من فهمي صفحة 27	
a	بما أن الاقتران تشعب عند 1، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1}(1+x)dx + \int_{1}^{2} 2xdx$ $= \left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-2}^{1} + x^2\Big\vert_{1}^{2}$ $= \left(1+\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(-2+\frac{1}{2}(-2)^2\right) + (2^2-1^2)$ $= \frac{9}{2}$
b	أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = \lvert x-3\rvert = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{3}(3-x)dx + \int_{3}^{4}(x-3)dx$ $= \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^{3} + \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big\vert_{3}^{4}$ $= \left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(-1)-\frac{1}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(4)^2-3(4)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)$ $= \frac{17}{2}$
أتحقق من فهمي صفحة 29	

<table>
<tr><td></td><td>

$P'(x) = 165 - 0.1x$

مقدار التغير الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية من 1400 دراجة إلى 1500 جهاز هو:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$$

$$f(1500) - f(1400) = \int_{1400}^{1500} (165 - 0.1x)dx$$

$$= (165x - 0.05x^2)\Big|_{1400}^{1500}$$

$$= (165(1500) - 0.05(1500)^2) - (165(1400) - 0.05(1400)^2)$$

$$= 2000$$

إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1400 جهاز إلى 1500 جهاز، فإن أرباح الشركة ستزيد شهريًّا بمقدار 2000 دينار.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">أتدرب وأحل المسائل صفحة 29</td></tr>
<tr><td>1</td><td>

$$\int_{-1}^{3} 3x^2dx = x^3\Big|_{-1}^{3}$$

$$= (3)^3 - (-1)^3$$

$$= 28$$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

$$\int_{-3}^{-2} 6dx = 6x\Big|_{-3}^{-2}$$

$$= 6(-2) - 6(-3)$$

$$= 6$$

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

$$\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)dx = (x^3 + 2x^2 + 3x)\Big|_0^2$$

$$= \left((2)^3 + 2(2)^2 + 3(2)\right) - \left((0)^3 + 2(0)^2 + 3(0)\right)$$

$$= 22$$

</td></tr>
</table>

4	$\int_1^8 8\sqrt[3]{x}dx = \int_1^8 8x^{\frac{1}{3}}dx$ $= 6x^{\frac{4}{3}}\Big\|_1^8$ $= 6\sqrt[3]{x^4}\Big\|_1^8$ $= 6\sqrt[3]{8^4} - 6\sqrt[3]{0^4}$ $= 96$
5	$\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$ $= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}}\right)\Big\|_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 8\sqrt{x}\right)\Big\|_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3} - 8\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 8\sqrt{1}\right)$ $= \frac{4}{3}$
6	$\int_{-2}^3 (-x^2 + 4x - 5)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right)\Big\|_{-2}^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 5(3)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2)\right)$ $= -\frac{80}{3}$
7	$\int_1^3 (x-2)(x+2)dx = \int_1^3 (x^2 - 4)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big\|_1^3$ $= \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right)$ $= \frac{2}{3}$

8	$\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx = \left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^{3}$ $=\left(9(3)-\frac{1}{3}(3)^3\right)-\left(9(-3)-\frac{1}{3}(-3)^3\right)$ $=36$
9	$\int_{1}^{4}\frac{2+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_{1}^{4}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$ $=\int_{1}^{4}\left(2x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$ $=\left(-2x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big\|_{1}^{4}$ $=\left(\frac{-2}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big\|_{1}^{4}$ $=\left(\frac{-2}{4}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)-\left(\frac{-2}{1}-\frac{2}{\sqrt{1}}\right)$ $=\frac{5}{2}$
10	$\int_{1}^{4}x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int_{1}^{4}x^3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx$ $=\int_{1}^{4}\left(x^{\frac{7}{2}}+x^2\right)dx$ $=\left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{1}^{4}$ $=\left(\frac{2}{9}\sqrt{x^9}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{1}^{4}$ $=\left(\frac{2}{9}\sqrt{4^9}+\frac{1}{3}(4)^3\right)-\left(\frac{2}{9}\sqrt{1^9}+\frac{1}{3}(1)^3\right)$ $=\frac{1211}{9}$

11	$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{5}}\right) dx = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} + \frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}\right) - \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4} + \frac{5}{4}\sqrt[5]{1^4}\right)$ $= 10 + \frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}$
12	$\int_1^9 (2+\sqrt{x})^2 dx = \int_1^9 (4 + 4\sqrt{x} + x) dx$ $= \int_1^9 \left(4 + 4x^{\frac{1}{2}} + x\right) dx$ $= \left(4x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^9$ $= \left(4(9) + \frac{8}{3}(9)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(9)^2\right) - \left(4(1) + \frac{8}{3}(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(1)^2\right)$ $= \frac{424}{3}$
13	$\int_{-1}^4 \|3x-6\| dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\|3x-6\| = \begin{cases} 6-3x, & x < 2 \\ 3x-6, & x \geq 2 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 2، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^4 \|3x-6\| dx = \int_{-1}^2 (6-3x) dx + \int_2^4 (3x-6) dx$ $= \left(6x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_{-1}^2 + \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x\right)\Big\|_2^4$ $= \left(6(2) - \frac{3}{2}(2)^2\right) - \left(6(-1) - \frac{3}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{3}{2}(4)^2 - 6(4)\right) - \left(\frac{3}{2}(2)^2 - 6(2)\right)$ $= \frac{39}{2}$

14	$\int_0^3 \lvert x-2\rvert dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\lvert x-2\rvert = \begin{cases} 2-x, & x<2 \\ x-2, & x\geq 2 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 2، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_0^3 \lvert x-2\rvert dx = \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^3 (x-2)dx$ $= \left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\rvert_0^2 + \left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big\rvert_2^3$ $= \left(2(2)-\frac{1}{2}(2)^2\right)-\left(2(0)-\frac{1}{2}(0)^2\right)+\left(\frac{1}{2}(3)^2-2(3)\right)-\left(\frac{1}{2}(2)^2-2(2)\right)$ $= \frac{5}{2}$
15	$\int_2^3 \frac{x^2-1}{x+1}dx = \int_2^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$ $= \int_2^3 (x-1)dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big\rvert_2^3$ $= \left(\frac{1}{2}(3)^2-3\right)-\left(\frac{1}{2}(2)^2-2\right) = \frac{3}{2}$
16	بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 (2x+1)dx + \int_3^4 (10-x)dx$ $= (x^2+x)\Big\rvert_0^3 + \left(10x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\rvert_3^4$ $= ((3)^2+3)-((0)^2+0)+\left(10(4)-\frac{1}{2}(4)^2\right)-\left(10(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)$ $= \frac{37}{2}$

17	بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (-x^2+5)dx + \int_{0}^{2} (x+5)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3+5x\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2+5x\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left(-\frac{1}{3}(0)^3+5(0)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3+5(-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(2)^2+5(2)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2+5(0)\right)$ $= \frac{50}{3}$
18	$\int_{2}^{2} g(x)dx = 0$
19	$\int_{5}^{1} (g(x)-2)dx = \int_{5}^{1} g(x)dx - \int_{5}^{1} 2dx$ $= (-8) - \left((2x)\|_{5}^{1}\right)$ $= (-8) - \left((2(1)) - (2(5))\right)$ $= 0$
20	$\int_{1}^{2} (3f(x)+x)dx = \int_{1}^{2} 3f(x)dx + \int_{1}^{2} xdx$ $= 3\int_{1}^{2} f(x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{1}^{2}$ $= 3(-4) + \left(\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2\right)$ $= -\frac{21}{2}$
21	$\int_{2}^{5} f(x)dx = \int_{2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{5} f(x)dx$ $= -(-4) + 6$ $= 10$
22	$\int_{1}^{5} (f(x)-g(x))dx = \int_{1}^{5} f(x)dx - \int_{1}^{5} g(x)dx$ $= 6 - 8$ $= -2$

23	$\int_1^5 (4f(x)+g(x))dx = \int_1^5 4f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4\int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4(6)+8$ $= 32$
24	$\int_1^m (6x-10)dx = 4$ $(3x^2-10x)\Big\vert_1^m = 4$ $(3m^2-10m)-\left(3(1)^2-10(1)\right) = 4$ $3m^2-10m+7=4$ $3m^2-10m+3=0$ $(3m-1)(m-3)=0$ $3m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3}$, $m-3=0 \Rightarrow m=3$
25	$C'(x)=6x+1$ مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًا هو: $f(b)-f(a)=\int_a^b C'(x)dx$ $f(20)-f(10)=\int_{10}^{20}(6x+1)dx$ $=(3x^2+x)\Big\vert_{10}^{20}$ $=(3(20)^2+20)-(3(10)^2+10)$ $=910$ إذن، عند زيادة الإنتاج من 10 قطع إلى 20 قطعة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًا بمقدار 910 دينار.

26	$N'(t) = 280t^{\frac{3}{2}}$ $N(t) = \int_0^4 280\, t^{\frac{3}{2}}\, dx$ $= 112\, t^{\frac{5}{2}}\Big\vert_0^4$ $= 112\sqrt{t^5}\Big\vert_0^4$ $= 112\sqrt{4^5} - 112\sqrt{0^5}$ $= 3584$ إذن، يدخل البحيرة 3584 كيلوغرامًا من الملوثات في 4 أشهر.
27	خالد لم يراعِ ترتيب حدود التكامل عند التعويض. $\int_0^2 (x^2 + x)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_0^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{14}{3}$
28	$\int_0^1 x^n(1-x)dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$ $= \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big\vert_0^1$ $= \left(\frac{1}{n+1}(1)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(1)^{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}(0)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(0)^{n+2}\right)$ $= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - (0)$ $= \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}$ $= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

29	$\int_1^5 (2ax+7)\,dx = 4a^2$ $(ax^2+7x)\Big\|_1^5 = 4a^2$ $\left(a(5)^2+7(5)\right)-\left(a(1)^2+7(1)\right)=4a^2$ $25a+35-a-7=4a^2$ $24a+28=4a^2$ $4a^2-24a-28=0$ $a^2-6a-7=0$ $(a-7)(a+1)=0$ $a-7=0 \Rightarrow a=7 \quad , a+1=0 \Rightarrow a=-1$

الدرس الرابع: المساحة

مسألة اليوم صفحة 31

$f(x) = 4 - x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; 4 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow (2 + x)(2 - x) = 0$$
$$\Rightarrow x = -2 \;\;,\;\; x = 2$$

وهي تمثل حدود التكامل

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$
$$= \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

إذن، المساحة هي: 10.667 كيلومتر مربع.

أتحقق من فهمي صفحة 33

$f(x) = x + 3$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow x = -3$$

بما أن -3 لا تنتمي إلى الفترة $[-1, 3]$، إذن نهملها.
نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 0 + 3 = 3 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x

$$A = \int_{-1}^{3} (x + 1)dx$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{3}$$
$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 - 1\right)$$
$$= 8$$

إذن، المساحة هي: 8 وحدات مربعة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أتحقق من فهمي صفحة 34

$$f(x) = x^2 - 4$$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 2 \ , \quad x = -2$$

بما كلا العددين $-2, 2$ لا ينتمي إلى الفترة $[-1, 1]$، إذن نهملهما.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 0 - 4 = -4 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x

$$A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 4)\,dx$$
$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)\right)\right)$$
$$= \frac{22}{3}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{22}{3}$ وحدات مربعة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أتحقق من فهمي صفحة 36

$f(x) = x^2 + 2x$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$$
$$\Rightarrow x(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \ , x = -2$$

بما أن العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-3, -1]$، إذن نقسم الفترة إلى فترتين:

$[-3, -2]$ و $[-2, -1]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, -2]$، وليكن $-\frac{5}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, -2]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-2, -1]$، وليكن $-\frac{3}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-2, -1]$

$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)dx - \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-3}^{-2} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-2}^{-1}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2\right)\right)$$

$$= 2$$

إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أتحقق من فهمي صفحة 38	
a	$f(x) = x^2 + 5x + 4$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 5x + 4 = 0$ $\Rightarrow (x+4)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x = -4 \;, x = -1$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-4, -1]$، وليكن -2 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 4 = -2 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-4, -1]$ $A = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx$ $= -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big\|_{-4}^{-1}$ $= -\left(\left(\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{5}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-4)^3 + \frac{5}{2}(-4)^2 + 4(-4)\right)\right)$ $= \frac{9}{2}$ إذن، المساحة هي: $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

	$f(x) = x^3 - 9x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies x^3 - 9x = 0$ $\implies x(x^2 - 9) = 0$ $\implies x(x+3)(x-3) = 0$ $\implies x = 0\ , x = -3\ , x = 3$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, 0]$، وليكن -1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(-1) = (-1)^3 - 9(-1) = 8 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, 0]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 3]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = (1)^3 - 9(1) = -8 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 3]$
b	$A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big\|_{-3}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big\|_{0}^{3}$ $= \left((0) - \left(\frac{1}{4}(-3)^4 - \frac{9}{2}(-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4}(3)^4 - \frac{9}{2}(3)^2\right) - (0)\right)$ $= \frac{81}{2}$ إذن، المساحة هي: $\frac{81}{2}$ وحدة مربعة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

<table>
<tr><td colspan="2">أتدرب وأحل المسائل صفحة 39</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$A=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big|_{-2}^{1}$
$=\left(\frac{1}{3}(1)^3+2(1)\right)-\left(\frac{1}{3}(-2)^3+2(-2)\right)$
$=9$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$A=\int_{4}^{9}x^{\frac{3}{2}}dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{4}^{9}$
$=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}\right)\Big|_{4}^{9}$
$=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{9^5}\right)-\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{4^5}\right)$
$=\frac{422}{5}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$A=-\int_{2}^{4}\left(\frac{2}{x^2}-3\right)dx=-\int_{2}^{4}(2x^{-2}-3)dx$
$=\int_{2}^{4}(-2x^{-2}+3)dx$
$=(2x^{-1}+3x)\Big|_{2}^{4}$
$=\left(\frac{2}{x}+3x\right)\Big|_{2}^{4}$
$=\left(\frac{2}{4}+3(4)\right)-\left(\frac{2}{2}+3(2)\right)$
$=\frac{11}{2}$</td></tr>
</table>

4	$A=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-3x)dx$ $=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+3x)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{0}^{1}$ $=(0)-\left(\frac{1}{4}(-1)^4-\frac{3}{2}(-1)^2\right)+\left(-\frac{1}{4}(1)^4+\frac{3}{2}(1)^2\right)-(0)$ $=\frac{5}{2}$
5	$A=\int_{0}^{3}(x+1)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big\vert_{0}^{3}$ $=\left(\frac{1}{2}(3)^2+3\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^2+0\right)$ $=\frac{15}{2}$
6	$A=\int_{0}^{2}3x^2dx=x^3\Big\vert_{0}^{3}$ $=(3^3)-(0^3)$ $=27$

7	$f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = -20$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 0 و 2 نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 2]$ $A = \int_0^2 (3x^2 - 2x + 2)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\Big\|_0^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2 + 2(2)\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 + 2(0)\right)$ $= \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.
8	$f(x) = 9 - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0$ $\Rightarrow (3 + x)(3 - x) = 0$ $\Rightarrow x = -3 , x = 3$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, 3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 9 - (0)^2 = 9 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, 3]$ $A = \int_{-3}^3 (9 - x^2)dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^3$ $= \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right)$ $= 36$ إذن، المساحة هي: 36 وحدة مربعة.

$f(x) = x^3 + 4x$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \implies x^3 + 4x = 0$$
$$\implies x(x^2 + 4) = 0$$
$$\implies x = 0$$

مميز العبارة التربيعية $(x^2 + 4)$ سالب، لذا لا أصفار لها.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 0]$، وليكن $-\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{2} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 0]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

9 $f(1) = (1)^3 + 4(1) = 5 > 0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 2]$

$$A = -\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 4x)dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (-x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 4x)dx$$
$$= \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$
$$= \left((0) - \left(-\frac{1}{4}(-1)^4 - 2(-1)^2\right)\right) + \left(\left(-\frac{1}{4}(2)^4 + 2(2)^2\right) - (0)\right)$$
$$= \frac{25}{4}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{25}{4}$ وحدة مربعة.

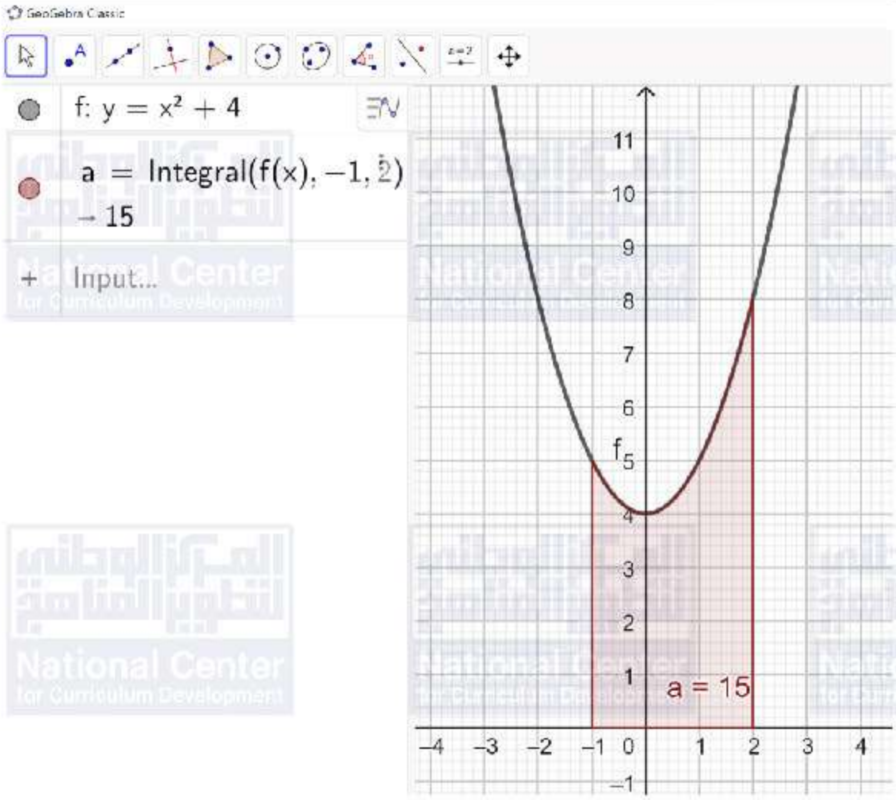
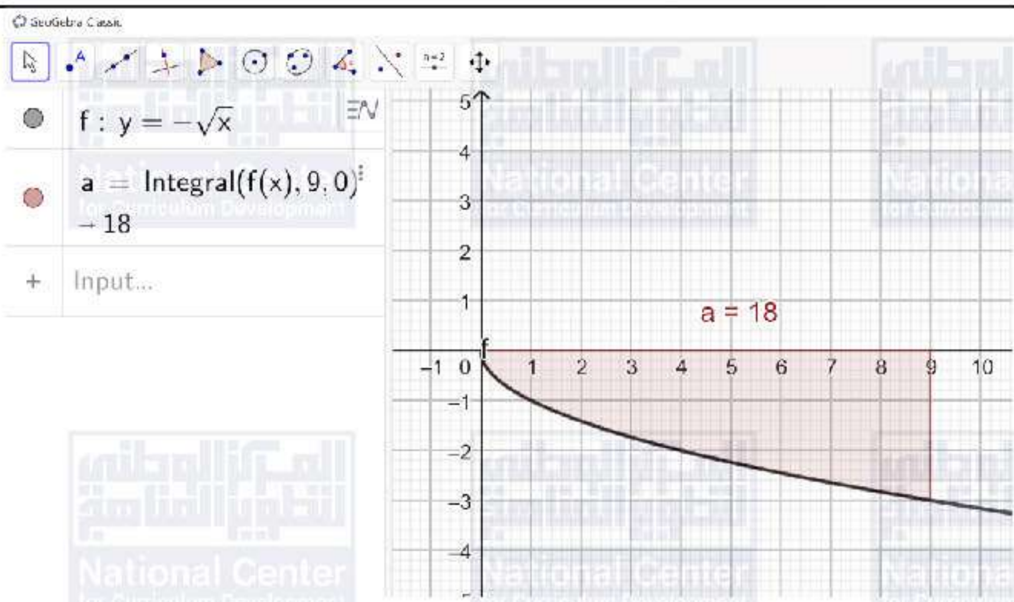
10	$f(x) = -7 + 2x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow -7 + 2x - x^2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-7) = -24$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4 نختار عددًا ضمن الفترة $[1,4]$، وليكن 2 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = -7 + 2(1) - (1)^2 = -6 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[1,4]$ $A = -\int_1^4 (-7 + 2x - x^2)dx$ $= \int_1^4 (7 - 2x + x^2)dx$ $= \left(7x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^4$ $= \left(7(4) - (4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3\right) - \left(7(1) - (1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3\right)$ $= 27$ إذن، المساحة هي: 27 وحدة مربعة.
11	$f(x) = 5 - x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 5 - x = 0$ $\Rightarrow x = 5$ نختار عددًا ضمن الفترة $[3,5]$، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(4) = 5 - (4) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[3,5]$ $A = \int_3^5 (5 - x)dx = \left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_3^5$ $= \left(\left(5(5) - \frac{1}{2}(5)^2\right) - \left(5(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)\right)$ $= 2$ إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.

12	$f(x) = (x+1)(x-4)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0$ $\Rightarrow x = -1\,, x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 4]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = (0+1)(0-4) = -4 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 4]$ $A = -\int_{-1}^{4} (x+1)(x-4)dx = -\int_{-1}^{4} (x^2 + x - 4x - 4)dx$ $= -\int_{-1}^{4} (x^2 - 3x - 4)dx$ $= \int_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big\|_{-1}^{4}$ $= \left(-\frac{1}{3}(4)^3 + \frac{3}{2}(4)^2 + 4(4)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{3}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right)$ $= \frac{125}{6}$ إذن، المساحة هي: $\frac{125}{6}$وحدة مربعة.
13	$f(x) = x^2 - 2x$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 2]$ $A = -\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)dx = \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big\|_{0}^{2}$ $= \left(-\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + (0)^2\right)$ $= \frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة.

14	$A=\int_2^3 (x^2-2x)dx$ $=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big\|_2^3$ $=\left((9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right)$ $=\frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
15	$A=\int_{-1}^0 (x^2-2x)dx$ $=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big\|_{-1}^0$ $=(0)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)$ $=\frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
16	$A=\int_0^4 (8+8\sqrt{x}-6x)dx=\int_0^4 \left(8+8x^{\frac{1}{2}}-6x\right)dx$ $=\left(8x+\frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x^2\right)\Big\|_0^4$ $=\left(8x+\frac{16}{3}\sqrt{x^3}-3x^2\right)\Big\|_0^4$ $=\left(8(4)+\frac{16}{3}\sqrt{4^3}-3(4)^2\right)-(0)$ $=\frac{80}{3}$ إذن، مساحة سطح الجناح هي $\frac{80}{3}$ متر مربع

منهاجي
متعة التعليم الهادف

17	$y = kx(4-x)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $y = 0 \Rightarrow \ kx(4-x) = 0$ $\Rightarrow \ x = 0 \ or \ x = 4$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 4]$ $A = \int_0^4 (kx(4-x))dx = \int_0^4 (4kx - kx^2)dx$ $= \left(2kx^2 - \frac{k}{3}x^3\right)\Big\|_0^4$ $= \left(2k(4)^2 - \frac{k}{3}(4)^3\right) - \left(2k(0)^2 - \frac{k}{3}(0)^3\right)$ $= \frac{32}{3}k$ $\frac{32}{3}k = 32 \ \Rightarrow \ k = 3$
18	$R_1 = 2 \ \Rightarrow -\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$ $\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx = -2$ $R_2 = 3 \ \Rightarrow -\int_{3}^{4} f(x)dx = 3$ $\Rightarrow \int_{3}^{4} f(x)dx = -3$ $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$ $\Rightarrow 10 = \int_0^3 f(x)dx + (-3)$ $\Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 13$ $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$ $= -2 + 13$ $= 11$

أتدرب صفحة 41	
1	 إذن، المساحة هي 15 وحدة مربعة
2	 إذن، المساحة هي 18 وحدة مربعة

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الخامس: تكامل اقترانات خاصة

مسألة اليوم صفحة 42

أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$

$$P(t)=\int \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}dt=\int \frac{5000}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$=\int 5000(t+1)^{-\frac{3}{2}}dt$$

$$=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+C$$

ثانيًا، نجد ثابت التكامل C:

بما أن عدد طلاب الجامعة عند التأسيس 2000 طالب، إذن $P(0)=2000$

$$P(t)=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$P(0)=-10000(0+1)^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$2000=-10000+C$$

$$C=12000$$

$$P(t)=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+12000$$

ثالثًا، نجد عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس:

$$P(3)=-10000(3+1)^{-\frac{1}{2}}+12000$$

$$\approx 7000$$

إذن، عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس هو 7000 طالبٍ.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أتحقق من فهمي صفحة 43

a	$\int (5x^2 + 7e^x)dx = \frac{5}{3}x^3 + 7e^x + C$
b	$\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right)dx = \int (9\cos x + 4x^{-3})dt$ $= 9\sin x - 2x^{-2} + C$ $= 9\sin x - \frac{2}{x^2} + C$
c	$\int (\sqrt[3]{x} - \sin x)dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} - \sin x\right)dx$ $= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \cos x + C$

أتحقق من فهمي صفحة 45

a	$\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right)dx = \ln\|x\| + 8e^x + C$
b	$\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right)dx = -\cos x - 5\ln\|x\| + C$
c	$\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)dx$ $= \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\right)dx$ $= x - 7\ln\|x\| - x^{-1} + C$ $= x - 7\ln\|x\| - \frac{1}{x} + C$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أتحقق من فهمي صفحة 47

a	$\int (7x-5)^6 dx = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}(7x-5)^7 + C$ $= \frac{1}{49}(7x-5)^7 + C$
b	$\int \sqrt{2x+1} dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$ $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$
c	$\int 4\cos(3x-7)\, dx = \frac{1}{3} \times 4\sin(3x-7) + C$ $= \frac{4}{3}\sin(3x-7) + C$
d	$\int (\sin 5x + e^{2x}) dx = \frac{1}{5} \times -\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$ $= -\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$
e	$\int (6x^2 - 3e^{7x+1}) dx = 2x^3 - \frac{3}{7}e^{7x+1} + C$
f	$\int \frac{5}{3x+2} dx = \frac{5}{3}\ln\|3x+2\| + C$ منهاجي متعة التعليم الهادف
أتحقق من فهمي صفحة 49	

	أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$ $P(t) = \int 105e^{0.03t}dt = \frac{105}{0.03}e^{0.03t} + C$ $= 3500e^{0.03t} + C$ ثانيًا، نجد ثابت التكامل C: بما أن عدد سكان المدينة عام 2010 هو 3500 شخص، إذن $P(0) = 3500$ $P(t) = 3500e^{0.03t} + C$ $P(0) = 3500e^{0} + C$ $3500 = 3500 + C$ $C = 0$ $P(t) = 3500e^{0.03t}$ ثالثًا، نجد سكان المدينة عام 2020 (أي بعد 10 سنوات): $P(10) = 3500e^{0.03(10)}$ ≈ 4725 إذن، عدد سكان المدينة عام 2020 هو 4725 ساكنًا.
	أتحقق من فهمي صفحة 50
a	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \ln\lvert x^2+3x\rvert + C$
b	$\int \frac{9x^2}{x^3+8}dx = \int \frac{3(3x^2)}{x^3+8}dx$ $= 3\int \frac{3x^2}{x^3+8}dx$ $= 3\ln\lvert x^3+8\rvert + C$
c	$\int \frac{x+1}{4x^2+8x}dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+8)}{4x^2+8x}dx$ $= \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2+8x}dx$ $= \frac{1}{8}\ln\lvert 4x^2+8x\rvert + C$

d	$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3e^{3x})}{e^{3x}+5}dx = \frac{1}{3}\ln\left\|e^{3x}+5\right\| + C$
أتحقق من فهمي صفحة 51	
a	$\int_0^2 (4e^{2x}+7)dx = (2e^{2x}+7x)\Big\|_0^2$ $= \left(2e^{2(2)}+7(2)\right) - \left(2e^{2(0)}+7(0)\right)$ $= 2e^4+12$
b	$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}dx = \int_0^4 (6x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$ $= \frac{1}{6}\times 2\,(6x+1)^{\frac{1}{2}}\Big\|_0^4$ $= \frac{1}{3}\sqrt{6x+1}\Big\|_0^4$ $= \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(4)+1}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(0)+1}\right)$ $= \frac{4}{3}$
c	$\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}dx = \int_0^4 \frac{4(2x)}{x^2+1}dx$ $= 4\int_0^4 \frac{(2x)}{x^2+1}dx$ $= 4\ln\left\|x^2+1\right\|\Big\|_0^4$ $= \left(4\ln\left\|(4)^2+1\right\|\right) - \left(4\ln\left\|(0)^2+1\right\|\right)$ $= 4\ln 17$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 52	
1	$\int \left(\frac{1}{2}e^x+3x\right)dx = \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}x^2 + C$
2	$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $= \int \left(1+\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx = x + 2\ln\left\|x\right\| - x^{-1} + C$

3	$\int (e^x+1)^2 dx = \int (e^{2x}+2e^x+1)dx$ $= \frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$
4	$\int \frac{1}{x}(x+2)dx = \int \left(1+\frac{2}{x}\right)dx$ $= x+2\ln\|x\|+C$
5	$\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right)dx = \int \left(4x^{-3}+\frac{5}{x}\right)dx$ $= -2x^{-2}+5\ln\|x\|+C$
6	$\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{6x}-7\ln\|x\|+C$
7	$\int \left(\frac{3}{x+1}-5e^{-2x}\right)dx = 3\ln\|x+1\|+\frac{5}{2}e^{-2x}+C$
8	$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx = \int (2x-3)^{-\frac{1}{2}}dx$ $= (2x-3)^{\frac{1}{2}}+C$
9	$\int (\sin(2x-3)+e^{6x-4})dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-3)+\frac{1}{6}e^{6x-4}+C$
10	$\int 4\cos(6x+1)\,dx = \frac{2}{3}\sin(6x+1)+C$
11	$\int \frac{\sin x+3\cos x}{4}dx = \int \left(\frac{\sin x}{4}+\frac{3\cos x}{4}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{4}\cos x\right)dx$ $= -\frac{1}{4}\cos x+\frac{3}{4}\sin x+C$
12	$\int (e^{6x-4}+(1-2x)^6)dx = \frac{1}{6}e^{6x-4}-\frac{1}{14}(1-2x)^7+C$

13	$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}dx$ $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\|x^2+1\| + C$
14	$\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3x^2)}{x^3-3}dx$ $= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx$ $= \frac{1}{3}\ln\|x^3-3\| + C$
15	$\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}dx = \int \frac{\frac{1}{6}(6x^2-6x)}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\int \frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\ln\|2x^3-3x^2+12\| + C$
16	$\int \frac{e^x+7}{e^x}dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{7}{e^x}\right)dx$ $= \int (1+7e^{-x})dx$ $= x - 7e^{-x} + C$
17	$\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}dx = \int \frac{-4\left(-\frac{1}{4}\right)}{5-\frac{1}{4}x}dx$ $= -4\ln\left\|5-\frac{1}{4}x\right\| + C$
18	$\int (4x^3+2+3\sin(5-3x))dx = x^4+2x+\cos(5-3x)+C$

19	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2e^{2x})}{e^{2x}+3}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert e^{2x}+3\rvert + C$
20	$\int \frac{3}{(1-4x)^2}dx = \int 3(1-4x)^{-2}dx$ $= \frac{3}{4}(1-4x)^{-1} + C$ $= \frac{3}{4(1-4x)} + C$
21	$\int \frac{1+xe^x}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{xe^x}{x}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx$ $= \ln\lvert x\rvert + e^x + C$
22	$\int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right)dx = (x^2 + 3e^x - 4\ln\lvert x\rvert)\Big\rvert_1^2$ $= ((2)^2 + 3e^2 - 4\ln\lvert 2\rvert) - ((1)^2 + 3e^1 - 4\ln\lvert 1\rvert)$ $= 3 + 3e^2 - 4\ln 2 - 3e$
23	$\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}dx = \int_0^5 \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+10}dx$ $= \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+10\rvert \Big\rvert_1^2$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert (2)^2+10\rvert - \frac{1}{2}\ln\lvert (1)^2+10\rvert$ $= \frac{1}{2}\ln 14 - \frac{1}{2}\ln 11$

24	$\int_3^4 (2x-6)^4 dx = \frac{1}{10}(2x-6)^5 \Big\vert_3^4$ $= \frac{1}{10}(2(4)-6)^5 - \frac{1}{10}(2(3)-6)^5$ $= \frac{32}{10}$
25	$v(t) = e^{-2t}$ $s(t) = \int e^{-2t} dt$ $= -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$ $s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $2m$ إذن $s(0) = 2$: $s(0) = -\frac{1}{2}e^{0} + C$ $2 = -\frac{1}{2}e^{0} + C$ $2 = -\frac{1}{2} + C$ $C = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}$

26	$f(x)=\int 5e^x dx$ $=5e^x+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$: $f(x)=5e^x+C \Rightarrow f(0)=5e^0+C$ $\Rightarrow \frac{1}{2}=5+C$ $\Rightarrow C=-\frac{9}{2}$ $f(x)=5e^x-\frac{9}{2}$
27	$f(x)=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ $=\int\left(\frac{2}{x}-x^{-2}\right)dx$ $=2\ln\lvert x\rvert+x^{-1}+C$ $=2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(1,-1)$: $f(x)=2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}+C \Rightarrow f(1)=2\ln 1+1+C$ $\Rightarrow -1=1+C$ $\Rightarrow C=-2$ $f(x)=2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}-2$

28	$f(x) = \int (e^{-x} + x^2)dx$ $= -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0,4)$: $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow f(0) = -e^0 + \frac{1}{3}(0)^3 + C$ $\Rightarrow \quad 4 = -1 + C$ $\Rightarrow C = 5$ $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$
29	$y = \int \left(2x + \frac{3}{x+e}\right)dx$ $= x^2 + 3\ln\|x+e\| + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة (e, e^2): $f(x) = x^2 + 3\ln\|x+e\| + C \Rightarrow f(e) = e^2 + 3\ln\|e+e\| + C$ $\Rightarrow \quad e^2 = e^2 + 3\ln 2e + C$ $\Rightarrow C = -3\ln 2e$ $f(x) = x^2 + 3\ln\|x+e\| - 3\ln 2e$
30	$P(t) = \int 0.51e^{-0.03t}dt$ $= -\frac{0.51}{0.03}e^{-0.03t} + C$ $= -17e^{-0.03t} + C$ بما أن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة، إذن $P(0) = 1000$ ومنه: $P(0) = -17e^{-0.03(0)} + C$ $1000 = -17 + C$ $C = 1017$ $P(t) = -17e^{-0.03t} + 1017$

31	$P(10) = -17e^{-0.03(10)} + 1017 \approx 1004$ عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة هو 1004 سمكة تقريبًا.
32	$A(t) = \int -0.9e^{-0.1t}dt$ $= \frac{0.9}{0.1}e^{-0.1t} + C$ $= 9e^{-0.1t} + C$ بما أن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ cm^2$ إذن، $A(0) = 9$، ومنه: $A(0) = 9e^{-0.1(0)} + C$ $9 = 9 + C$ $C = 0$ $A(t) = 9e^{-0.1t}$
33	$A(5) = 9e^{-0.1(5)} \approx 5.5\ cm^2$ مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة هي $5.5\ cm^2$ تقريبًا.
34	$\int \frac{1}{2x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2)}{2x}dx$ $= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert 2x\rvert + C$
35	$\int \sqrt{e^x}dx = \int (e^x)^{\frac{1}{2}}dx$ $= \int e^{\frac{1}{2}x}dx$ $= 2e^{\frac{1}{2}x} + C$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

36	$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(-2\cos x)}{3+2\sin x}dx$ $= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cos x}{3+2\sin x}dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\|3+2\sin x\| + C$
37	$\int (x^2+2x+1)^5 dx = \int ((x+1)^2)^5 dx$ $= \int (x+1)^{10} dx$ $= \frac{1}{11}(x+1)^{11} + C$
38	$\int \frac{1}{x+1}dx$ هذا التكامل هو المختلف $\int \frac{1}{x+1}dx$ كونه الوحيد الذي يُحل باللوغاريتم الطبيعي.

الدرس السادس: التكامل بالتعويض

مسألة اليوم صفحة 54	
	أولًا نجد تكامل الاقتران: $C(t)=\int \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt$ $u=t^2+16 \implies \frac{du}{dt}=2t$ $\implies dt=\frac{du}{2t}$ $C(t)=\int \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt$ $=\int \frac{0.3t}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2t}$ $=0.15\int u^{-\frac{1}{2}}du$ $=2u^{\frac{1}{2}}+K$ $=2\sqrt{u}+K$ $=2\sqrt{t^2+16}+K$ بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0)=0$ ومنه: $C(t)=2\sqrt{t^2+16}+K$ $C(0)=2\sqrt{0^2+16}+K$ $0=8+K$ $K=-8$ $C(t)=2\sqrt{t^2+16}-8$ $C(3)=2\sqrt{(3)^2+16}-8=2$ مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثلاث الأولى من حقنه هو $2\ mg/cm^2$
أتحقق من فهمي صفحة 58	

a	$\int 6x^2(2x^3-3)^4 dx$ $u = 2x^3 - 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$ $\int 6x^2(2x^3-3)^4 dx = \int 6x^2u^4 \times \frac{du}{6x^2}$ $= \int u^4 du$ $= \frac{1}{5}u^5 + C$ $= \frac{1}{5}(2x^3-3)^5 + C$
b	$\int xe^{x^2+1} dx$ $u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int xe^{x^2+1} dx = \int xe^u \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2}e^u du$ $= \frac{1}{2}e^u + C$ $= \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$

c	$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx$ $u = 2x^2 + 8x \implies \frac{du}{dx} = 4x + 8$ $\implies dx = \frac{du}{4x+8}$ $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx = \int \frac{4x+8}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{4x+8}$ $= \int \frac{1}{\sqrt{u}}du$ $= \int u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 2u^{\frac{1}{2}} + C$ $= 2\sqrt{2x^2+8x} + C$
d	$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ $u = \ln x \implies \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\implies dx = x du$ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{u^2}{x} \times x du$ $= \int u^2 du$ $= \frac{1}{3}u^3 + C$ $= \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

e	$\int x^3 \cos(x^4-5)\,dx$ $u = x^4 - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$ $\int x^3 \cos(x^4-5)\,dx = \int x^3 \cos u \times \frac{du}{4x^3}$ $= \int \frac{1}{4}\cos u\,du$ $= \frac{1}{4}\sin u + C$ $= \frac{1}{4}\sin(x^4-5) + C$
f	$\int \cos^4 x \sin x\,dx$ $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \cos^4 x \sin x\,dx = \int u^4 \sin x \times \frac{du}{-\sin x}$ $= \int -u^4 du$ $= -\frac{1}{5}u^5 + C$ $= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C$

أتحقق من فهمي صفحة 60	
أولًا نجد تكامل الاقتران: $P(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}dx$ $u = 36 + x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $P(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}dx = \int \frac{-300x}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2x}$ $= -150 \int u^{-\frac{3}{2}}du$ $= 300u^{-\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{300}{\sqrt{u}} + C$ $= \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$ بما أن سعر القطعة الواحدة هو 75 دينارًا عندما يكون عدد القطع المبيعة *800* قطعة، إذن $P(8) = 75$ ومنه: $P(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$ $P(8) = \frac{300}{\sqrt{36+4^2}} + C$ $75 = \frac{300}{\sqrt{52}} + C$ $C = 75 - \frac{300}{\sqrt{52}}$ $P(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + 75 - \frac{300}{\sqrt{52}}$	

أتحقق من فهمي صفحة 62	
a	$\int_0^1 x^2(x^3-1)^4 dx$ $u = x^3 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$ $x = 0 \Rightarrow u = (0)^3 - 1 = -1$ $x = 1 \Rightarrow u = (1)^3 - 1 = 0$ $\int_0^1 x^2(x^3-1)^4 dx = \int_{-1}^0 x^2 u^4 \frac{du}{3x^2}$ $= \int_{-1}^0 \frac{1}{3} u^4 du$ $= \frac{1}{15} u^5 \Big\|_{-1}^0$ $= \left(\frac{1}{15}(0)^5\right) - \left(\frac{1}{15}(-1)^5\right)$ $= \frac{1}{15}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

b	$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7}\,dx$ $u = 2 - x^4 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -4x^3$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-4x^3}$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 2 - (0)^4 = 2$ $x = -1 \quad \Rightarrow u = 2 - (-1)^4 = 1$ $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7}\,dx = \int_{1}^{2} \frac{x^3}{u^7} \times \frac{du}{-4x^3}$ $= \int_{1}^{2} -\frac{1}{4}u^{-7}\,du$ $= \frac{1}{24}u^{-6}\Big\|_{1}^{2}$ $= \frac{1}{24u^6}\Big\|_{1}^{2}$ $= \left(\frac{1}{24(2)^6}\right) - \left(\frac{1}{24(1)^6}\right)$ $= -\frac{21}{512}$

c	$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = xdu$ $x = e \quad \Rightarrow u = \ln e = 1$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = \ln 1 = 0$ $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 \frac{u}{x}xdu$ $= \int_0^1 u\,du$ $= \frac{1}{2}u^2\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{1}{2}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 62	

1	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$ $u = x^2 + 4 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2\sqrt{u}}du$ $= \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ $= u^{\frac{1}{2}} + C$ $= \sqrt{x^2 + 4 + C}$
2	$\int x^2(2x^3+5)^4dx$ $u = 2x^3 + 5 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$ $\int x^2(2x^3+5)^4dx = \int x^2u^4 \times \frac{du}{6x^2}$ $= \int \frac{1}{6}u^4du$ $= \frac{1}{30}u^5 + C$ $= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$

3	$\int 3x\sqrt{x^2+7}dx$ $u = x^2+7 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int 3x\sqrt{x^2+7}dx = \int 3x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du$ $= u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \sqrt{(x^2+7)^3} + C$
4	$\int x^6 e^{1-x^7}dx$ $u = 1-x^7 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -7x^6$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-7x^6}$ $\int x^6 e^{1-x^7}dx = \int x^6 e^u \times \frac{du}{-7x^6}$ $= \int -\frac{1}{7}e^u du$ $= -\frac{1}{7}e^u + C$ $= -\frac{1}{7}e^{1-x^7} + C$

5	$\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}dx$ $u = x^5 + 9 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5x^4$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$ $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}dx = \int \frac{x^4}{u^3} \times \frac{du}{5x^4}$ $= \int \frac{1}{5}u^{-3}du$ $= -\frac{1}{10}u^{-2} + C$ $= -\frac{1}{10(x^5+9)^2} + C$
6	$\int (3x^2-1)e^{x^3-x}dx$ $u = x^3 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 - 1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2-1}$ $\int (3x^2-1)e^{x^3-x}dx = \int (3x^2-1)e^u \frac{du}{3x^2-1}$ $= \int e^u du$ $= e^u + C$ $= e^{x^3-x} + C$

7	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ $u = x^2 - 2x + 4 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 2$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x-2}$ $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx = \int \frac{3x-3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x-2}$ $= \int \frac{3(x-1)}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2(x-1)}$ $= \int \frac{3}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$ $= 3u^{\frac{1}{2}} + C$ $= 3\sqrt{x^2 - 2x + 4} + C$
8	$\int \frac{1}{x \ln x} dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = x\,du$ $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{xu} \times x\,du$ $= \int \frac{1}{u} du$ $= \ln\|u\| + C$ $= \ln\|\ln x\| + C$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

9	$\int \sin x\,(1+\cos x)^4 dx$ $u = 1+\cos x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -\sin x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\sin x}$ $\int \sin x\,(1+\cos x)^4 dx = \int \sin x\, u^4 \times \dfrac{du}{-\sin x}$ $= \int -u^4 du$ $= -\dfrac{1}{5}u^5 + C$ $= -\dfrac{1}{5}(1+\cos x)^5 + C$
10	$\int \sin^5 2x \cos 2x\, dx$ $u = \sin 2x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2\cos 2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2\cos 2x}$ $\int \sin^5 2x \cos 2x\, dx = \int u^5 \cos 2x \times \dfrac{du}{2\cos 2x}$ $= \int \dfrac{1}{2}u^5 du$ $= \dfrac{1}{12}u^6 + C$ $= \dfrac{1}{12}(\sin 2x)^6 + C$

11	$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$ $u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow dx = -x^2 du$ $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx = \int \frac{\sin(u)}{x^2} \times -x^2 du$ $= \int -\sin u\, du$ $= \cos u + C$ $= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$
12	$\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}dx$ $u = \sin x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}dx = \int \frac{\cos x}{e^u} \times \frac{du}{\cos x}$ $= \int \frac{1}{e^u}du$ $= \int e^{-u}du$ $= -e^{-u} + C$ $= -e^{-\sin x} + C$ $= -\frac{1}{e^{\sin x}} + C$

13	$\int e^x(2+e^x)^5 dx$ $u = 2 + e^x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = e^x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{e^x}$ $\int e^x(2+e^x)^5 dx = \int e^x u^5 \times \dfrac{du}{e^x}$ $= \int u^5 du$ $= \dfrac{1}{6}u^6 + C$ $= \dfrac{1}{6}(2+e^x)^6 + C$
14	$\int \dfrac{\cos(\ln x)}{x} dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = x du$ $\int \dfrac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \dfrac{\cos(u)}{x} \times x du$ $= \int \cos u \, du$ $= \sin u + C$ $= \sin(\ln x) + C$

15	$\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4 dx$ $u = x^3 - x^2 - x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3x^2 - 2x - 1$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{3x^2-2x-1}$ $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4 dx$ $= \int (3x^2-2x-1)u^4 \times \dfrac{du}{3x^2-2x-1}$ $= \int u^4 du$ $= \dfrac{1}{5}u^5 + C$ $= \dfrac{1}{5}(x^3-x^2-x)^5 + C$
16	$\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx$ $u = x^2 - x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x - 1$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x-1}$ $x = 2 \quad \Rightarrow u = (2)^2 - 2 = 2$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = (0)^2 - 0 = 0$ $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx = \int_0^2 (2x-1)e^u \dfrac{du}{2x-1}$ $= \int_0^2 e^u du$ $= e^u \|_0^2$ $= e^2 - e^0$ $= e^2 - 1$

17	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow dx = -x^2 du$ $x = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ $x = 1 \Rightarrow u = 1$ $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^u}{x^2} \times -x^2 du$ $= \int_1^{\frac{1}{2}} -e^u du$ $= -e^u\|_1^{\frac{1}{2}}$ $= -e^{\frac{1}{2}} + e$ $= -\sqrt{e} + e$

18	$\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ $u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = x du$ $x = e^3 \quad \Rightarrow u = \ln e^3 = 3$ $x = e \quad \Rightarrow u = \ln e = 1$ $\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int_{1}^{3} \frac{\sqrt{u}}{x} x du$ $= \int_{1}^{3} u^{\frac{1}{2}} du$ $= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big\|_{1}^{3}$ $= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big\|_{1}^{3}$ $= \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}$ $= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$

19	$\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}dx$ $u = x^4+2x^2+1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3+4x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3+4x}$ $x=1 \quad \Rightarrow u = (1)^4+2(1)^2+1 = 4$ $x=0 \quad \Rightarrow u = (0)^4+2(0)^2+1 = 1$ $\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}dx = \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u} \times \frac{du}{4x^3+4x}$ $= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u} \times \frac{du}{4(x^3+x)}$ $= \int_1^4 \frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}}du$ $= \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_1^4$ $= \frac{1}{6}\sqrt{u^3}\Big\|_1^4$ $= \frac{1}{6}\sqrt{4^3} - \frac{1}{6}\sqrt{1^3}$ $= \frac{7}{6}$

20	$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = 3 \Rightarrow u = 10$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^{10} \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$ $= \int_1^{10} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ $= u^{\frac{1}{2}}\Big\vert_1^{10}$ $= \sqrt{u}\Big\vert_1^{10}$ $= \sqrt{10} - 1$

21	$\int_{1}^{2} \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3} dx$ $u = x^2 + x + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$ $x = 2 \Rightarrow u = (2)^2 + 2 + 4 = 10$ $x = 1 \Rightarrow u = (1)^2 + 1 + 4 = 6$ $\int_{1}^{2} \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3} dx = \int_{6}^{10} \frac{2x+1}{u^3} \times \frac{du}{2x+1}$ $= \int_{6}^{10} u^{-3} du$ $= -\frac{1}{2} u^{-2} \Big\|_{6}^{10}$ $= -\frac{1}{2u^2} \Big\|_{6}^{10}$ $= -\frac{1}{2(10)^2} + \frac{1}{2(6)^2}$ $= \frac{2}{225}$

22	$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$ هناك طريقتان للحل: إما بالتكامل بالتعويض، أو تكامل كثير حدود بعد توزيع الأقواس. طريقة التكامل بالتعويض: $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = (0)^2 + 1 = 1$ $x = -1 \quad \Rightarrow u = (-1)^2 + 1 = 2$ $x = 1 \quad \Rightarrow u = (1)^2 + 1 = 2$ $A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)dx$ $= -\int_{2}^{1} 6xu \times \frac{du}{2x} + \int_{1}^{2} 6xu \times \frac{du}{2x}$ $= -\int_{2}^{1} 3u\,du + \int_{1}^{2} 3u\,du$ $= -\frac{3}{2}u^2\Big\|_{2}^{1} + \frac{3}{2}u^2\Big\|_{1}^{2}$ $= -\frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 - \frac{3}{2}(1)^2$ $= 9$ ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 9 وحدات مربعة

23	$A = -\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}dx + \int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$ $u = 16 - x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -2x$ $\Rightarrow dx = \dfrac{du}{-2x}$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 16 - (0)^2 = 16$ $x = -4 \quad \Rightarrow u = 16 - (-4)^2 = 0$ $x = 4 \quad \Rightarrow u = 16 - (4)^2 = 0$ $A = -\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}dx + \int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$ $= -\int_{0}^{16} x\sqrt{u} \times \dfrac{du}{-2x} + \int_{16}^{0} x\sqrt{u} \times \dfrac{du}{-2x}$ $= \int_{0}^{16} \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du + \int_{16}^{0} -\dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du$ $= \dfrac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_{0}^{16} + -\dfrac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_{16}^{0}$ $= \dfrac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big\|_{0}^{16} + -\dfrac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big\|_{16}^{0}$ $= \dfrac{1}{3}\sqrt{(16)^3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{(0)^3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{(0)^3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{(16)^3}$ $= \dfrac{128}{3}$ ومنه مساحة المنطقة المظللة هي $\frac{128}{3}$ وحدة مربعة

24	$f(x)=\int xe^{4-x^2}dx$ $u=4-x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=-2x$ $\Rightarrow dx=\dfrac{du}{-2x}$ $f(x)=\int xe^{4-x^2}dx$ $=\int xe^{u}\dfrac{du}{-2x}$ $=\int -\dfrac{1}{2}e^{u}du$ $=-\dfrac{1}{2}e^{u}+C$ $=-\dfrac{1}{2}e^{4-x^2}+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(-2,1)$: $f(x)=-\dfrac{1}{2}e^{4-x^2}+C \Rightarrow f(-2)=-\dfrac{1}{2}e^{4-(-2)^2}+C$ $\Rightarrow \quad 1=-\dfrac{1}{2}+C$ $\Rightarrow C=\dfrac{3}{2}$ $f(x)=-\dfrac{1}{2}e^{4-x^2}+\dfrac{3}{2}$

25	$f(x) = \int \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx$ $u = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$ $f(x) = \int \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx$ $= \int \frac{2x}{u^2} \times \frac{du}{-2x}$ $= \int -u^{-2} du$ $= u^{-1} + C$ $= \frac{1}{1-x^2} + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0, -1)$: $f(x) = \frac{1}{1-x^2} + C \quad \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1-0^2} + C$ $\Rightarrow \quad -1 = 1 + C$ $\Rightarrow C = -2$ $f(x) = \frac{1}{1-x^2} - 2$

26	$s(t) = \int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} dt$ $u = 1 + t^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $\int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} dt = \int \frac{-2t}{\sqrt{u^3}} \times \frac{du}{2t}$ $= \int -u^{-\frac{3}{2}} du$ $= 2u^{-\frac{1}{2}} + C$ $= 2(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $4\ m$ ، إذن، $s(0) = 4$: $s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C \quad \Rightarrow f(0) = \frac{2}{\sqrt{1+0^2}} + C$ $\Rightarrow \quad 4 = 2 + C$ $\Rightarrow C = 2$ $s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$

27	أولًا نجد تكامل الاقتران: $V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dt$ $u=0.2t^4+8000 \quad \Rightarrow \frac{du}{dt}=0.8t^3$ $\Rightarrow dt=\frac{du}{0.8t^3}$ $V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dx$ $=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{u}}\times\frac{du}{0.8t^3}$ $=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{3}}du$ $=\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}+C$ $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{u^2}+C$ $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$ بما أن سعر دونم الأرض الآن هو 5000 دينارٍ، إذن $V(0)=5000$ ومنه: $V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$ $V(0)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2(0)^4+8000)^2}+C$ $5000=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(8000)^2}+C$ $5000=\frac{400}{3}+C$ $C=\frac{14600}{3}$ $V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+\frac{14600}{3}$

28	$\int_0^{10} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}dt$ $u = 4 + e^{0.2t} \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0.2e^{0.2t}$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{0.2e^{0.2t}}$ $t = 10 \Rightarrow u = 4 + e^{0.2(10)} = 4 + e^2$ $t = 0 \Rightarrow u = 4 + e^{0.2(0)} = 5$ $\int_0^{10} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}dt = \int_5^{4+e^2} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.2e^{0.2t}}$ $= \int_5^{4+e^2} 20u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 40u^{\frac{1}{2}}\Big\vert_5^{4+e^2}$ $= 40\sqrt{u}\Big\vert_5^{4+e^2}$ $= 40\sqrt{4+e^2} - 40\sqrt{5}$ ≈ 46 إذن يزداد عدد سكان هذه المدينة بحوالي 46 ألف شخص من 2015 إلى 2025.
29	المختلف هو $\int x(x^3+1)dx$ لأنه الوحيد الذي لا يحل بطريقة التكامل بالتعويض.
30	الخطأ الذي ارتكبته سعاد هو أنها لم تغير حدود التكامل. $\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx$ $u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2x$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{2x}$ $x = 1 \Rightarrow u = 1^2 + 1 = 2$ $x = 0 \Rightarrow u = 0^2 + 1 = 1$ $\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx = \int_1^2 8xu^3\frac{du}{2x}$ $= \int_1^2 4u^3du$ $= u^4\Big\vert_1^2$ $= (2)^4 - (1)^4$ $= 15$

31	$\int_0^k kx^2e^{x^3}dx$ $u = x^3 \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = 3x^2$ $\Rightarrow dt = \dfrac{du}{3x^2}$ $x = k \quad \Rightarrow u = k^3$ $x = 0 \quad \Rightarrow u = 0^3 = 0$ $\int_0^k kx^2e^{x^3}dx = \int_0^{k^3} kx^2e^u \dfrac{du}{3x^2}$ $= \int_0^{k^3} \dfrac{k}{3}e^u du$ $= \dfrac{k}{3}e^u \Big\|_0^{k^3}$ $= \dfrac{k}{3}e^{k^3} - \dfrac{k}{3}e^0$ $= \dfrac{k}{3}e^{k^3} - \dfrac{k}{3}$ $\int_0^k kx^2e^{x^3}dx = \dfrac{2}{3}(e^8 - 1) \quad \Rightarrow \dfrac{k}{3}e^{k^3} - \dfrac{k}{3} = \dfrac{2}{3}(e^8 - 1)$ $\Rightarrow \dfrac{k}{3}(e^{k^3} - 1) = \dfrac{2}{3}(e^8 - 1)$ $\Rightarrow k = 2$