اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	d
3	c
4	d
5	a
6	d
7	c
8	$f(x) = x^2 - 7x + 10 \qquad (2, 0)$ $f'(x) = 2x - 7$ $f'(2) = 4 - 7 = -3$ معادلة المماس: $y - 0 = -3(x - 2)$ $y = -3x + 6$
9	$f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}} \qquad (4, 12)$ $f'(x) = 2x + \frac{8\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = 2x + \frac{4}{x\sqrt{x}}$ $f'(4) = 2(4) + \frac{4}{4\sqrt{4}} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ معادلة المماس: $y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$ $y - 12 = \frac{17}{2}x - 34$ $y = \frac{17}{2}x - 22$

10

$$f(x)=\frac{2x-1}{x} \qquad (1,1)$$

$$f'(x)=\frac{(x)(2)-(2x-1)(1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$

$$f'(1)=\frac{1}{1}=1$$

معادلة المماس:

$$y-1=1(x-1)$$

$$y-1=x-1$$

$$y=x$$

11

$$f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x+1}} \qquad (4,1)$$

$$f'(x)=\frac{-3\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)}{2x+1}=\frac{-3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(4)=\frac{-3}{(8+1)\sqrt{8+1}}=-\frac{1}{9}$$

معادلة المماس:

$$y-1=-\frac{1}{9}(x-4)$$

$$y-1=-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}$$

$$y=-\frac{1}{9}x+\frac{13}{9}$$

12

$$f(x)=(x-7)(x+4) \quad ,x=1$$

$$f(1)=(1-7)(1+4)=-30 \quad \rightarrow \quad (1,-30)$$

$$f'(x)=(x-7)(1)+(x+4)(1)$$

$$f'(1)=(1-7)+(1+4)=-1$$

معادلة المماس:

$$y-(-30)=-1(x-1)$$

$$y+30=-x+1$$

$$y=-x-29$$

13	$f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x=-5$ $f(-5)=\frac{-5}{-5+4}=5 \quad \rightarrow \quad (-5,5)$ $f'(x)=\frac{(x+4)(1)-(x)(1)}{(x+4)^2}=\frac{4}{(x+4)^2}$ $f'(-5)=\frac{4}{(-5+4)^2}=4$ معادلة المماس: $y-5=4(x+5)$ $y-5=4x+20$ $y=4x+25$
14	$f(x)=2x^4+9x^3+x \quad , x=-2 \quad (-2,-42)$ $f(-2)=2(-2)^4+9(-2)^3+(-2)=-42$ $f'(x)=8x^3+27x^2+1$ $f'(-2)=8(-2)^3+27(-2)^2+1=45$ معادلة المماس: $y-(-42)=45(x+2)$ $y+42=45x+90$ $y=45x+48$
15	$f(x)=7x^3+6x-5 \quad , \quad x=2$ $f(2)=7(2)^3+6(2)-5=63$ $f'(x)=21x^2+6$ $f'(2)=21(2)^2+6=90$ معادلة العمودي على المماس $y-63=-\frac{1}{90}(x-2)$ $y-63=-\frac{1}{90}x+\frac{1}{45}$ $y=-\frac{1}{90}x+\frac{2836}{45}$

16

$f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4x^4} = \frac{3}{2}x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-1}$, $x = -2$

$f(-2) = \frac{3}{2}(-2)^{-2} - \frac{1}{4}(-2)^{-1} = \frac{3}{2 \times (-2)^2} - \frac{1}{4 \times (-2)^1} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -3x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-2}$

$f'(-2) = \frac{-3}{(-2)^3} + \frac{1}{4 \times (-2)^2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$

معادلة العمودي على المماس $y - \frac{1}{2} = -\frac{16}{7}(x+2)$

$y - \frac{1}{2} = -\frac{16}{7}x - \frac{32}{7}$

$y = -\frac{16}{7}x - \frac{32}{7} + \frac{1}{2}$

$y = -\frac{16}{7}x - \frac{57}{14}$

17

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$

$4x^3 - 9x^2 = 0$

$x^2(4x - 9) = 0$

$x = 0 \ \ or \ \ 4x - 9 = 0 \rightarrow 4x = 9 \ \rightarrow \ x = \frac{9}{4}$

$f(0) = (0)^4 - 3(0)^3 + 1 = 1$

$f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^4 - 3\left(\frac{9}{4}\right)^3 + 1 = -\frac{1931}{256}$

النقاط هي $(0,1), \left(2, -\frac{1931}{256}\right)$

18

ميل مماس المنحنى 12 أي $f'(x) = 12$

$f'(x) = 3x^2$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4 \rightarrow \ x = 2 \ \ or \ \ x = -2$

$f(2) = (2)^3 - 3 = 5$

$f(-2) = (-2)^3 - 3 = -11$

النقاط هي $(2,5), (-2,-11)$

19	$f'(x) = 8x - 5$ $f''(x) = 8$
20	$f'(x) = \frac{1}{x} - 9e^x$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 9e^x$
21	$f'(x) = 10 - \left((2x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(2) \right)$ $= 10 - (\sqrt{x} + 2\sqrt{x})$ $= 10 - 3\sqrt{x}$ $f''(x) = -3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$
22	$f(x) = \sqrt{x}(x+2) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ $f''(2) = \frac{3}{4}(2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2)^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
23	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 \quad , x = 1$ $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x$ $f''(x) = 24x^2 - 18x - 2$ $f''(1) = 24 - 18 - 2 = 4$

24	معدل التغير المعطى: $\frac{dA}{dt} = 50$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=20}$ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة ونصف قطرها: $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ $50 = 2\pi(20)\frac{dr}{dt}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi}$ إذن يزداد طول نصف قطر البقعة بمعدل $\frac{5}{4\pi}$ m/min عندما يكون طول نصف قطرها 20 m
25	$v(t) = 3t^2 - 12t + 12$ $v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 12 = 0$ m/s
26	بما أن السرعة المتجهة صفر، إذن الجسم في حالة سكون لحظي.
27	$a(t) = 6t - 12$ $a(2) = 12 - 12 = 0$ m/s^2
28	يكون الجسم في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرًا $3t^2 - 12t + 12 = 0$ $t^2 - 4t + 4 = 0$ $(t-2)(t-2) = 0$ $t = 2$
29	$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$ $v(3) = \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 8$ m/s
30	$a(t) = t + 1$ $a(3) = 3 + 1 = 4$ m/s^2
31	يكون الشخص في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرًا لكن السرعة هنا هي $\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{2}(t+1)^2$ وهذا مقدار موجب لجميع قيم $t \geq 0$، ولا يمكن أن يكون صفرًا، فلا يكون الشخص في حالة سكون لحظي أبدًا.

$f'(x) = 24 - 6x^2$

$24 - 6x^2 = 0$

$6x^2 = 24 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$

القيم الحرجة هي: $x = -2$ و $x = 2$

32 $f''(x) = -12x$

$f''(-2) = 24 > 0$

$f''(2) = -24 < 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 9 + 48 - 16 = 41$

$f'(x) = 3(3x-2)^2(3) - 9$

$= 9(3x-2)^2 - 9$

$9(3x-2)^2 - 9 = 0$

$(3x-2)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 3x - 2 = \pm 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 \; or \; x = \frac{1}{3}$

القيمة الحرجة هي: $x = 1, \; x = \frac{1}{3}$

33 $f''(x) = 18(3x-2)^1(3) = 54(3x-2)$

$f''(1) = 54 > 0$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = (3-2)^3 - 9 = -8$

وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{1}{3}$ وهي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3(\frac{1}{3}) - 2\right)^3 - 9(\frac{1}{3}) = -4$

34

$f(x) = 4x^5 - 10x^2$

$f'(x) = 20x^4 - 20x$

$20x^4 - 20x = 0$

$20\,x(x^3 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \;\; or \;\; x = 1$

القيم الحرجة هي: $x = 0$ و $x = 1$

$f''(x) = 80x^3 - 20$

$f''(0) = -20 < 0$

$f''(1) = 60 > 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = -6$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

35

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 800$

معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=60}$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$800 = 2\pi(60)^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{800}{7200\pi} = \frac{1}{9\pi}$

إذن يزداد طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{1}{9\pi}$ cm/s عندما يكون طول نصف قطره 60 cm

36	طول السياج مساحة الحظيرة المستطيلة $P = x + 2y$ $A = xy$ $245000 = xy \quad \rightarrow \quad y = \frac{245000}{x}$ $P = x + 2y$ $P(x) = x + 2\left(\frac{245000}{x}\right)$ $= x + \frac{490000}{x}$ $P'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$ $1 - \frac{490000}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{490000}{x^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 490000 \quad \rightarrow \quad x = \pm 700$ لكن الأطوال لا تكون سالبة، لذا فإن $x = 700$ $P''(x) = \frac{980000}{x^3}$ $P''(700) = \frac{980000}{(700)^3} = 2 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 700$ وتكون أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن هي: $x = 700\ \text{m}$ و $y = \frac{245000}{700} = 350\ \text{m}$
37	$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$ $2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -2x$ $\frac{dy}{dx}(2y - 1) = -2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y - 1}$

38

$$2x + 6 - 8\frac{dy}{dx} + 10y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$-8\frac{dy}{dx} + 10y\frac{dy}{dx} = -2x - 6$$
$$\frac{dy}{dx}(10y - 8) = -2x - 6$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 6}{10y - 8}$$

39

$$2y\frac{dy}{dx} + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) + 2x = 0$$

بتعويض $(x, y) = (-4, 3)$ ينتج أنّ:

$$2(3)\frac{dy}{dx} + (-4)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3)(1) + 2(-4) = 0$$
$$6\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 3 - 8 = 0$$
$$2\frac{dy}{dx} = 5$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$$

ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$ هو $\frac{5}{2}$

40

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}(x - (-4))$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}x + 10$$
$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

41

مساحة المستطيل

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$
$$A'(x) = 10 - 2x$$
$$10 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 5$

$$A''(x) = -2$$
$$A''(5) = -2 < 0$$

توجد قيمة عظمى عندما $x = 5$

إذن أكبر مساحة ممكنة هي $A(5) = 10(5) - (5)^2 = 25\ \text{cm}^2$

42	حجم الصندوق $V = x^2y$ مجموع أطوال الأحرف $S = 8x + 4y$ $144 = 8x + 4y$ $4y = 144 - 8x$ $y = 36 - 2x$ حجم الصندوق بدلالة x $V(x) = x^2(36 - 2x)$ $= 36x^2 - 2x^3$
43	$V'(x) = 72x - 6x^2$ $72x - 6x^2 = 0$ $6x(12 - x) = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = 12$ توجد قيمتان حرجتان هما $x = 12$ و $x = 0$ $V''(x) = 72 - 12x$ $V''(0) = 72 > 0$ $V''(12) = 72 - 144 = -72 < 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$ إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$
44	$6x^2 + 8y\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (-2, -1)$ ينتج أنّ: $6(-2)^2 + 8(-1)\frac{dy}{dx} = 0$ $24 - 8\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = 3$

45	$3x^2 - (x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - (y^2)(2x) = 0$ بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ ينتج أنّ: $3(3)^2 - (3)^2\left(2(-2)\frac{dy}{dx}\right) - ((-2)^2)(2(3)) = 0$ $27 + 36\frac{dy}{dx} - 24 = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$