إجابات كتاب الطالب- مادة الرياضيات- الصف الثاني الثانوي الأدبي ف1

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

الدرس الأول: المماس والعمودي على المماس

	مسألة اليوم صفحة 92
1	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$ ميل المنحنى عند النقطة $(1,1)$ هو:
2	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{0-2} = -1$
3	نلاحظ أن ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1,1)$ وميل المستقيم L متساويان، أي أن ميل المنحنى عند أي نقطة عليه يساوي ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.
	أتحقق من فهمي صفحة 93
	$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $f'(3) = 27 - 18 + 2 = 11$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ بتعويض $a = 3$: $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$ $y - 5 = 11(x - 3)$ $y - 5 = 11x - 33$ $y = 11x - 28$

أتحقق من فهمي صفحة 94

$$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \quad \rightarrow (1,1)$$

$$f'(x) = \frac{(x)(2) - (2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

بتعويض $a = 1$: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$y - 1 = 1(x-1)$$

$$y - 1 = x - 1$$

$$y = x$$

أتحقق من فهمي صفحة 96

a

$f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{4}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$$

نقطة التماس هي $(4, -1)$

b

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$, $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$0 = -3x^2 + 6x$$

$$3x(-x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad or \quad x = 2$$

$$f(0) = -2$$

$$f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$$

نقطتا التماس هما $(0, -2), (2, 2)$

أتحقق من فهمي صفحة 97

$f(x) = \ln x^3 \ , \ (1,0)$

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

$f'(1) = \frac{3}{1} = 3$

ميل المماس هو 3 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{3}$

معادلة العمودي على المماس $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

بتعويض $a = 1$ $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1)$

$y - 0 = -\frac{1}{3}(x-1)$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 98

1

$f(x) = x^3 - 6x + 3 \ , \ (2,-1) \ , \ f(2) = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 6$

$f'(2) = 12 - 6 = 6$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$y - (-1) = 6(x-2)$

$y + 1 = 6x - 12$

$y = 6x - 13$

2

$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x} = \frac{x^4}{x} - \frac{3x^3}{x} = x^3 - 3x^2 \ , \ (1,-2) \ , \ f(1) = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(1) = 3 - 6 = -3$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - (-2) = -3(x-1)$

$y + 2 = -3x + 3$

$y = -3x + 1$

3	$f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)\ ,\ (1,0)\ ,\ f(1)=0$ $f'(x)=(\sqrt{x})(2x)+(x^2-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $f'(1)=(1)(2)+(0)\left(\frac{1}{2}\right)=2$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-0=2(x-1)$ $y=2x-2$
4	$f(x)=x+\frac{4}{x}\ ,\ (-4,-5)\ ,\ f(-4)=-5$ $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$ $f'(-4)=1-\frac{4}{16}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(-4)=f'(-4)(x-(-4))$ $y-(-5)=\frac{3}{4}(x+4)$ $y+5=\frac{3}{4}x+3$ $y=\frac{3}{4}x-2$
5	$f(x)=x+e^x\ ,\ (0,1)\ ,\ f(0)=1$ $f'(x)=1+e^x$ $f'(0)=1+e^0=1+1=2$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $y-1=2(x-0)$ $y-1=2x$ $y=2x+1$

6	$f(x)=\ln(x+e)\ ,\ (0,1)\ ,\ f(0)=1$ $f'(x)=\frac{1}{x+e}$ $f'(0)=\frac{1}{0+e}=\frac{1}{e}$ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $y-1=\frac{1}{e}(x-0)$ $y-1=\frac{1}{e}x$ $y=\frac{1}{e}x+1$
7	$f(x)=\sqrt{x-7}\ ,\ x=16$ $f(16)=\sqrt{16-7}=3\ \rightarrow\ (16,3)$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-7}}$ $f'(16)=\frac{1}{2\sqrt{16-7}}=\frac{1}{6}$ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y-f(16)=f'(16)(x-16)$ $y-3=\frac{1}{6}(x-16)$ $y-3=\frac{1}{6}x-\frac{8}{3}$ $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$

8	$f(x) = (x-1)e^x \ , \ x = 1$ $f(1) = (1-1)e^1 = 0 \ \rightarrow (1,0)$ $f'(x) = (x-1)e^x + e^x(1) = xe^x$ $f'(1) = 1e^1 = e$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $y - 0 = e(x-1)$ $y = ex - e$
9	$f(x) = \frac{x+3}{x-3} \ , \ x = 4$ $f(4) = \frac{4+3}{4-3} = 7 \ \rightarrow (4,7)$ $f'(x) = \frac{(x-3)(1) - (x+3)(1)}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$ $f'(4) = \frac{-6}{(4-3)^2} = -6$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y - f(4) = f'(4)(x-4)$ $y - 7 = -6(x-4)$ $y - 7 = -6x + 24$ $y = -6x + 31$

10

$f(x) = (\ln x)^2 \ , \ x = e$

$f(e) = (\ln e)^2 = 1 \ \rightarrow \ (e, 1)$

$f'(x) = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(e) = 2(\ln e)\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$

معادلة المماس:

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(e) = f'(e)(x - e)$

$y - 1 = \frac{2}{e}(x - e)$

$y - 1 = \frac{2}{e}x + 2$

$y = \frac{2}{e}x + 3$

11

$f(x) = (3x + 10)^2 \ , \ (-3, 1)$

$f'(x) = 2(3x + 10)^1(3) = 6(3x + 10)$

$f'(-3) = 6(-9 + 10) = 6$

ميل المماس هو 6 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$

معادلة العمودي على المماس:

$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

$y - f(-3) = -\frac{1}{f'(-3)}(x - (-3))$

$y - 1 = -\frac{1}{6}(x + 3)$

$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$

12

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ ، $(4,1)$

$$f'(x) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$$

$$f'(4) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8+1} = -\frac{1}{9}$$

ميل المماس هو $-\frac{1}{9}$ إذن ميل العمودي على المماس هو 9

معادلة العمودي على المماس:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - f(4) = 9(x-4)$$

$$y - 1 = 9(x-4)$$

$$y = 9x - 35$$

13

نلاحظ من الرسم أن المنحنى يقطع المحور x في النقطة $(-4, 0)$ أي أنّ $f(-4) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$f'(-4) = \frac{1}{-4+5} = 1$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - f(-4) = -\frac{1}{f'(-4)}(x-(-4))$$

$$y - 0 = -\frac{1}{1}(x+4)$$

$$y = -x - 4$$

14	عند تقاطع المنحنى مع المحور y يكون x=0 ويكون $y = \ln(0+5) = \ln 5$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, \ln 5)$ $f'(x) = \frac{1}{x+5}$ $f'(0) = \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5}$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0)$ $y - \ln 5 = -5(x-0)$ $y = -5x + \ln 5$
15	$f(x) = 4e^{2x+1}$ $f(-1) = 4e^{-2+1} = \frac{4}{e} \rightarrow \left(-1, \frac{4}{e}\right)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(-1) = 8e^{-2+1} = \frac{8}{e}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(-1) = f'(-1)(x--1)$ $y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}(x+1)$ $y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}x + \frac{8}{e}$ $y = \frac{8}{e}x + \frac{12}{e}$

16	$y = 4e^{2(0)+1} = 4e \rightarrow (0, 4e)$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, 4e)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(0) = 8e^{0+1} = 8e$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0)$ $y - 4e = -\frac{1}{8e}(x)$ $y = -\frac{1}{8e}x + 4e$
17	$f(x) = x^2 - x - 12$ $f'(x) = 2x - 1$ $3 = 2x - 1$ $4 = 2x$ $x = 2$ $f(2) = 4 - 2 - 12 = -10$ النقطة هي $(2, -10)$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(2) = f'(2)(x-2)$ $y - (-10) = 3(x-2)$ $y + 10 = 3x - 6$ $y = 3x - 16$
18	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$ $0 = 3x^2 - 8x$ $x(3x-8) = 0$ $x = 0 \ \ or \ \ 3x - 8 = 0 \rightarrow 3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3}$ $f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$ $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$ النقاط هي $(0, -4), \left(2, -\frac{364}{27}\right)$

19	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x)=0$ $f'(x)=\dfrac{(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}(1)}{2x-1}$ $0=\dfrac{\left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}}{2x-1}$ $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}=0$ $\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1}$ $x=2x-1$ $x=1$ $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2-1}}=1$ النقطة هي $(1,1)$
20	ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي $f'(x)=1$ $f'(x)=10x-49$ $1=10x-49$ $10x=50$ $x=5$ $f(5)=5(5)^2-49(5)+12=125-245+12=-108$ النقطة هي $(5,-108)$
21	$f'(x)=6-2x$ $f'(1)=6-2=4$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-5=4(x-1)$ $y-5=4x-4$ $y=4x+1$

22	معادلة العمودي على المماس: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$ $y-5=-\frac{1}{4}(x-1)$ $y-5=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ $y=-\frac{1}{4}x+\frac{21}{4}$
23	$f'(x)=-2x$ معادلة المماس عند النقطة $(-1,5)$: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$ $y-5=2(x+1)$ $y-5=2x+2$ $y=2x+7$ معادلة المماس عند النقطة $(1,5)$: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-5=-2(x-1)$ $y-5=-2x+2$ $y=-2x+7$
24	$2x+7=-2x+7$ $4x=0$ $x=0$ $y=-2(0)+7=7$ نقطة تقاطع المماسين هي: $(0,7)$

25

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = \frac{1}{2}$

معادلة المماس عند النقطة $(1, 1)$:

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$

$y - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

26

معادلة العمودي على المماس:

$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$

$y - 1 = -2(x - 1)$

$y - 1 = -2x + 2$

$y = -2x + 3$

27

$f(x) = \sqrt{x} - 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ميل المستقيم $y = 2x - 1$ هو 2، والمماس يوازيه فميله أيضًا هو2، إذن:

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$

$4\sqrt{x} = 1$

$\sqrt{x} = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{16}$

$f\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{16}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

النقطة هي $\left(\frac{1}{16}, -\frac{3}{4}\right)$

الدرس الثاني: المشتقة الثانية، والسرعة المتجهة، والتسارع

	مسألة اليوم صفحة 100
	$v(t) = t + 15$ $t + 15 = 15 \quad \rightarrow \quad t = 0\ \text{s}$
	أتحقق من فهمي صفحة 101
a	$f'(x) = 4x^3 - 6x - \sin x$ $f''(x) = 12x^2 - 6 - \cos x$
b	$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$ $f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$ $f''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$
	أتحقق من فهمي صفحة 103
a	$v(t) = 6t - 3t^2$ $v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9\ \text{m/s}$
b	بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (إلى اليسار) عندما $t = 3$
c	$a(t) = 6 - 6t$ $a(3) = 6 - 6(3) = -12\ \text{m/s}^2$
d	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $6t - 3t^2 = 0$ $3t(2 - t) = 0$ $t = 0 \quad or \quad t = 2$
	أتحقق من فهمي صفحة 104
a	$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ $v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0\ \text{m/s}$
b	$a(t) = 6t - 12$ $a(3) = 6(3) - 12 = 6\ \text{m/s}^2$

	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0
c	$3t^2 - 12t + 9 = 0$ $(3t-3)(t-3) = 0$ $t = 1 \ \ or \ \ t = 3$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 104
1	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ $f''(x) = 18x - 8$
2	$f'(x) = 2e^x + 2x$ $f''(x) = 2e^x + 2$
3	$f'(x) = -2\sin x - 3x^2$ $f''(x) = -2\cos x - 6x$
4	$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) - 9x^2 = \frac{4}{x} - 9x^2$ $f''(x) = -\frac{4}{x^2} - 18x$
5	$f'(x) = (x^3)(6)(x+6)^5(1) + (x+6)^6(3x^2)$ $= (x+6)^5(9x^3 + 18x^2)$ $f''(x) = (5)(x+6)^4(1)(9x^3 + 18x^2) + (x+6)^5(27x^2 + 36x)$ $= (x+6)^4(72x^3 + 288x^2 + 216x)$
6	$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$ $= x^6 + (\ln x)(7x^6)$ $f''(x) = 6x^5 + (\ln x)(42x^5) + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)$ $= 13x^5 + (\ln x)(42x^5)$
7	$f'(x) = \frac{(x+2)(1) - (x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$ $f''(x) = \frac{-2 \times 2(x+2)(1)}{(x+2)^4} = \frac{-4(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-4}{(x+2)^3}$
8	$f'(x) = 2x\cos x^2$ $f''(x) = (2x)(-2x\sin x^2) + (\cos x^2)(2) = -4x^2\sin x^2 + 2\cos x^2$
9	$f'(x) = -6x^{-4}$ $f''(x) = 24x^{-5}$

10	$f(x) = x^3 - \frac{5}{x} = x^3 - 5x^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 + 5x^{-2}$ $f''(x) = 6x - 10x^{-3}$
11	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
12	$f'(x) = -4 + 2x - 3x^2$ $f''(x) = 2 - 6x$
13	$f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x} = 8x^3 - 3x + 4x^{-1}$ $f'(x) = 24x^2 - 3 - 4x^{-2}$ $f''(x) = 48x + 8x^{-3}$ $f''(-2) = 48(-2) + 8(-2)^{-3} = -96 - 1 = -97$
14	$f'(x) = \frac{-2}{(2x-4)^2}$ $f''(x) = \frac{2 \times 2 \times (2x-4)^1 \times 2}{(2x-4)^4} = \frac{8}{(2x-4)^3}$ $f''(3) = \frac{8}{(2(3)-4)^3} = \frac{8}{8} = 1$
15	$f'(x) = 3px^2 - 6px + 1$ $f''(x) = 6px - 6p$ $f''(2) = 6p(2) - 6p$ $-1 = 12p - 6p$ $6p = -1$ $p = -\frac{1}{6}$
16	$v(t) = 5t^4 - 40t$ $v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285 \text{ m/s}$
17	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 3$

18	$a(t) = 20t^3 - 40$ $a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500 \text{ m/s}^2$
19	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $5t^4 - 40t = 0$ $5t(t^3 - 8) = 0$ $t = 0 \quad or \quad t = 2$
20	$s(t) = \frac{3t}{1+t}$ $v(t) = \frac{(1+t)(3) - (3t)(1)}{(1+t)^2} = \frac{3}{(1+t)^2}$ $v(4) = \frac{3}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} = 0.12 \text{ m/s}$
21	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 4$
22	$a(t) = \frac{-3 \times 2(1+t)(1)}{(1+t)^4} = \frac{-6}{(1+t)^3}$ $a(4) = \frac{-6}{(1+4)^3} = \frac{-6}{125} = -0.048 \text{ m/s}^2$
23	$v(t) = 2t - 8$ $v(6) = 2(6) - 8 = 4 \text{ m/s}$
24	$a(t) = 2$ $a(6) = 2 \text{ m/s}^2$
25	يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $2t - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 4$

26	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(5-3x^2)^6(1)-(x)(6)(5-3x^2)^5(-6x)}{(5-3x^2)^{12}}$ $= \frac{(5-3x^2)^5(5-3x^2+36x^2)}{(5-3x^2)^{12}}$ $= \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$
27	$v(t) = 3t^2 - 12$ $a(t) = 6t$ $a(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$ $v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$
28	$v(t) = 6t^2 - 24$ $a(t) = 12t$ $v(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \rightarrow \quad t = 2$ $a(2) = 12(2) = 24 \text{ m/s}^2$

الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم صفحة 106

مساحة سطح الحوض المفتوح من الأعلى : $S = 4xy + x^2$

حجم الحوض : $V = x^2 y$

$$0.2 = x^2 y \quad \rightarrow \quad y = \frac{0.2}{x^2}$$

$$S = 4xy + x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{0.2}{x^2}\right) + x^2 = \frac{0.8}{x} + x^2$$

$$S'(x) = \frac{-0.8}{x^2} + 2x$$

$$\frac{-0.8}{x^2} + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = \frac{0.8}{x^2} \rightarrow 2x^3 = 0.8 \quad \rightarrow \quad x^3 = 0.4 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{0.4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{0.4}$

$$S''(x) = \frac{1.6}{x^3} + 2$$

$$S''\left(\sqrt[3]{0.4}\right) = \frac{1.2}{\left(\sqrt[3]{0.4}\right)^3} + 2 = 5 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{0.4}$ ،

وتكون أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{0.4}\ \text{m} \ , \qquad y = \frac{0.2}{\left(\sqrt[3]{0.4}\right)^2}\ \text{m}$$

أتحقق من فهمي صفحة 108

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$
$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$
$$(3x + 2)(x - 2) = 0$$
$$x = -\frac{2}{3} \quad or \quad x = 2$$

القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$

$$f''(x) = 6x - 4$$
$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0$$
$$f''(2) = 6(2) - 4 = 8 > 0$$

توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{2}{3}$ وهي $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{175}{27}$

توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 8 - 2(4) - 4(2) + 5 = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 110

مساحة المستطيل $A = xy$

محيط المستطيل $P = 2x + 2y$

$$54 = 2x + 2y$$
$$27 = x + y \quad \rightarrow \quad y = 27 - x$$
$$A = xy$$
$$A(x) = x(27 - x)$$
$$= 27x - x^2$$
$$A'(x) = 27 - 2x$$
$$27 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{27}{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$

$$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$ ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

$$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25 \text{ m}^2$$

أتحقق من فهمي صفحة 111

المساحة الكلية لسطح الخزان $S = 4xh + 2x^2$

حجم الخزان $V = x^2h$

$$2 = x^2h \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{x^2}$$

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{8}{x} + 2x^2$$

$$S'(x) = \frac{-8}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-8}{x^2} + 4x = 0 \quad \rightarrow \quad 4x = \frac{8}{x^2} \quad \rightarrow 4x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x^3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2}$

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} + 4$$

$$S''\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{16}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} + 4 = 12 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{2}$ ،

وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt[3]{2}\ \text{m}, \qquad w = x = \sqrt[3]{2}\ \text{m}, \qquad h = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \sqrt[3]{2}\ \text{m}$$

أتحقق من فهمي صفحة 113

حجم الخزان $V = x^2 h$

مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى $A = 4xh + x^2$

$$54 = 4xh + x^2 \quad \rightarrow \quad 4xh = 54 - x^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2 \left(\frac{54 - x^2}{4x} \right)$$

$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4} x - \frac{1}{4} x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4} x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4} x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 54 - 3x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{54}{3} = 18 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن ان يكون سالبًا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2} x$$

$$V''\left(\sqrt{18}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{18}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18}\, m, \qquad w = x = \sqrt{18}\, m, \qquad h = \frac{54 - 18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}}\, m$$

أتحقق من فهمي صفحة 115

اقتران الإيراد $R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$

اقتران التكلفة $C(x) = 2250 + 18x$

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x$$
$$= 1732x - 2x^2 - 2250$$
$$P'(x) = 1732 - 4x$$
$$1732 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1732}{4} = 433$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$

$$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$

ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاجة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 116

1

$$f'(x) = 2x - 2$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow 2x - 2 = 0$$
$$\rightarrow 2x = 2$$
$$\rightarrow x = 1$$

القيمة الحرجة هي: $x = 1$

$$f''(x) = 2$$
$$f''(1) = 2 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

2

$$f'(x) = 15 - 2x - x^2$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow 15 - 2x - x^2 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$\rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$
$$\rightarrow x = -5 \ \ or \ \ x = 3$$

القيم الحرجة هي: $x = -5 \ , \ x = 3$

$$f''(x) = -2 - 2x$$
$$f''(-5) = -2 + 10 = 8 > 0$$
$$f''(3) = -2 - 6 = -8 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -5$ وهي:

$$f(-5) = 20 - 75 - 25 - \frac{125}{3} = -\frac{365}{3}$$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 3$ وهي: $f(3) = 20 + 45 - 9 - 9 = 47$

3	$f'(x) = 4x^3 - 4x$ $f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0$ $\rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ $\rightarrow x = 0 \ , x = \pm 1$ القيم الحرجة هي: $x = 0 \ , x = 1, x = -1$ $f''(x) = 12x^2 - 4$ $f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0$ $f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0$ $f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0$ إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = 0 - 0 - 2 = -2$ و توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ و $x = -1$ هي: $f(1) = f(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$
4	محيط الحديقة من دون الجدار $P = AB + BC + CD$ $300 = AB + x + AB$ $300 = 2AB + x$ $300 - x = 2AB$ $AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$
5	مساحة الحديقة المستطيلة $A = BC \times AB$ $A(x) = x \times \left(150 - \frac{1}{2}x\right)$ $= 150x - \frac{1}{2}x^2$
6	$A'(x) = 150 - x$ $150 - x = 0$ $x = 150$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$ $A''(x) = -1$ $A''(150) = -1 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$ ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما: $AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75 \text{ m}$, $BC = x = 150 \text{ m}$

7	حجم العلبة $V = lwh$ $V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x \ , \quad 0 \le x \le 15$ $= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$ $= (1440 - 156x + 4x^2)x$ $= 1440x - 156x^2 + 4x^3$
8	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20 \quad or \quad x = 6$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 6$ والقيمة $x = 20$ خارج مجال اقتران الحجم. إذ يستحيل قص مربعات طول ضلع كل منها 20 cm من زوايا الورقة التي عرضها 30 cm $V''(x) = -312 + 24x$ $V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0 \rightarrow$ $V(6)$ قيمة عظمى إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$
9	سعر المنتج الواحد هو $p(x) = 500 - 0.002x$ اقتران الإيراد $R(x) = (500 - 0.002x)x = 500x - 0.002x^2$
10	اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$ $= (500x - 0.002x^2) - (300 + 1.10x)$ $= 500x - 0.002x^2 - 300 - 1.10x$ $= 498.9x - 0.002x^2 - 300$

11	$P'(x) = 498.9 - 0.004x$ $498.9 - 0.004x = 0$ $498.9 = 0.004x$ $x = \frac{498.9}{0.004} = \frac{498900}{4} = 124725$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 124725$ $P''(x) = -0.004$ $P''(124725) = -0.004 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 124725$ ، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو 124725 قطعة أكبر ربح ممكن هو: $P(124725) = 498.9(124725) - 0.002(124725)^2 - 300 = 31112351.25$
12	سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن $p(124725) = 500 - 0.002(124725)$ $= 250.55$

حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة × ارتفاع المنشور

مساحة المثلث = نصف طول القاعدة المثلث × ارتفاع المثلث

مساحة المثلث:

$$A_1 = \frac{1}{2}x(x) = \frac{1}{2}x^2$$

حجم المنشور:

$$V = \frac{1}{2}x^2 l$$

$$1000 = \frac{1}{2}x^2 l$$

$$2000 = x^2 l$$

$$l = \frac{2000}{x^2}$$

مساحة سطح القالب = مساحتي القاعدتين المثلثيتين + مساحتي الوجهين اللذين إحدى حافيتيهما ضلع القائمة x

$$A = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2(xl) = x^2 + 2xl$$

$$A(x) = x^2 + 2x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{4000}{x}$$

13

$$A'(x) = 2x - \frac{4000}{x^2}$$

$$2x - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{4000}{x^2}$$

$$2x^3 = 4000$$

$$x^3 = 2000$$

$$x = \sqrt[3]{2000}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2000}$

$$A''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$

$$A''(x) = 1 + \frac{8000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^3} = 1 + \frac{8000}{2000} = 5 > 0$$

توجد قيمة صغرى عندما $x = \sqrt[3]{2000}$

إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{2000}\ \text{cm}\ ,\ l = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^2} = \sqrt[3]{2000}\ \text{cm}$$

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني والمعدلات المرتبطة

مسألة اليوم صفحة 117

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 0.5$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=1}$

العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه: $V = \pi r^2 h$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi(1)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \approx 0.16$$

إذن يزداد ارتفاع الوقود في الخزان بمعدل $0.16\ \text{m/min}$ تقريبًا

أتحقق من فهمي صفحة 119

a

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

b

$$10y\frac{dy}{dx} - 2e^x = 4\frac{dy}{dx}$$

$$10y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - 4) = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{10y - 4}$$

c

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(1)+2y\frac{dy}{dx}=-4\sin x$$

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=-4\sin x-y$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y)=-4\sin x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+4\sin x}{x+2y}$$

أتحقق من فهمي صفحة 120

$x^3+2y^3=6$, $(2,-1)$

$$3x^2+6y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$3(2)^2+6(-1)^2\frac{dy}{dx}=0$$

بتعويض $(x,y)=(2,-1)$

$$12+6\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{12}{6}=-2$$

ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(2,-1)$ هو -2

معادلة المماس:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-1)=-2(x-2)$$

$$y+1=-2x+4$$

$$y=-2x+3$$

أتحقق من فهمي صفحة 121

معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=4}$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$
$$= 4\pi(4)^2(3)$$
$$= 192\pi$$

إذن يزداد حجم البالون بمعدل $192\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره 4 cm

أتدرب وأحل المسائل صفحة 121

1
$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$4y\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}$$

2
$$2x + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2}$$

3
$$2x + 2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx}(2 - 2y) = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2 - 2y} = \frac{-x}{1 - y}$$

4	$2x\frac{dy}{dx}+2y-3\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}-7$ $2x\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=-7-2y$ $\frac{dy}{dx}(2x-3-2y)=-7-2y$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-7-2y}{2x-3-2y}$
5	$5y^4\frac{dy}{dx}=3x^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{5y^4}$
6	$(x^2)\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)+(y^3)(2x)+\frac{dy}{dx}=0$ $3x^2y^2\frac{dy}{dx}+2xy^3+\frac{dy}{dx}=0$ $3x^2y^2\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=-2xy^3$ $\frac{dy}{dx}(3x^2y^2+1)=-2xy^3$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy^3}{3x^2y^2+1}$
7	$\sqrt{x}+\sin y=16$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{dy}{dx}\cos y=0$ $\frac{dy}{dx}\cos y=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}\cos y}$
8	$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(e^x)=(x)\left(\frac{dy}{dx}e^y\right)+(e^y)(1)$ $e^x\frac{dy}{dx}-xe^y\frac{dy}{dx}=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}(e^x-xe^y)=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y-ye^x}{e^x-xe^y}$

9	$\sin x + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = -\sin x$ $\frac{dy}{dx} = -y \sin x$
10	$32y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ $32y\frac{dy}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{32y} = \frac{x}{16y}$
11	$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 4 + 6\frac{dy}{dx} = 0$ $2y\frac{dy}{dx} + 6\frac{dy}{dx} = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx}(2y + 6) = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y + 6}$
12	$9x^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $9(2)^2 - 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (2, 4)$ $36 - 8\frac{dy}{dx} = 0$ $8\frac{dy}{dx} = 36$ $\frac{dy}{dx} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$

13	$4x - 9y^2 \frac{dy}{dx} = 0$ $4(-2) - 9(1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (-2, 1)$ $-8 - 9\frac{dy}{dx} = 0$ $9\frac{dy}{dx} = -8$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{9}$
14	$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ $2(1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}$ بتعويض $(x, y) = (e, 1)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e}$
15	$2(y-3)^1 \frac{dy}{dx} = 4$ $2(1-3)^1 \frac{dy}{dx} = 4$ بتعويض $(x, y) = (6, 1)$ $-4\frac{dy}{dx} = 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-4} = -1$
16	$4x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $4(3) + 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (3, 4)$ $12 + 8\frac{dy}{dx} = 0$ $8\frac{dy}{dx} = -12$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$ هو $-\frac{3}{2}$

17	معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 3)$ $y - 4 = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$
18	$2y\frac{dy}{dx} + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + y + 2x = 0$ $2(-2)\frac{dy}{dx} + (3)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (-2) + 2(3) = 0$ بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ $-4\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 2 + 6 = 0$ $-\frac{dy}{dx} = -4$ $\frac{dy}{dx} = 4$ ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$ هو 4
19	معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - (-2) = 4(x - 3)$ $y + 2 = 4x - 12$ $y = 4x - 14$
20	معادلة العمودي على المماس: $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ $y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3)$ $y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$

21	معدل التغير المعطى: $\frac{dx}{dt} = -6$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{x=30}$ العلاقة التي تربط بين حجم المكعب وطول ضلعه: $V = x^3$ $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$ $= 3(30)^2(-6)$ $= -16200$ إذن يتناقص حجم المكعب بمعدل $16200\ \text{cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول ضلعه $30\ \text{cm}$
22	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.5$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{r=3}$ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها: $A = 4\pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ $= 8\pi(3)(0.5)$ $= 12\pi$ إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $12\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطرها $3\ \text{cm}$
23	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.13$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=0.45}$ العلاقة التي تربط بين حجم الورم ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $= 4\pi(0.45)^2(0.13)$ $= 0.1053\pi$ إذن يزداد حجم الورم بمعدل $0.1053\pi\ \text{cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره $0.13\ \text{cm}$

24

$x^2 + 6y^2 = 10$

$(2)^2 + 6y^2 = 10 \rightarrow 6y^2 = 6 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

$2x + 12y\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y}$

عند النقطة $(2, 1)$:

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$

$y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

عند النقطة $(2, -1)$:

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2)$

$y + 1 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

25

$$\ln(xy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1)}{xy} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - 2xy^2\frac{dy}{dx} = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 2xy^2) = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

26

معدل التغير المطلوب $\left.\frac{du}{dt}\right|_{w=64}$

العلاقة التي تربط u مع w هي:

$$u = 150\sqrt[3]{w^2}$$

$$u = 150w^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{du}{dt} = 150 \times \frac{2}{3}w^{-\frac{1}{3}}\frac{dw}{dt}$$

لكن $w = 0.05t + 8$ ، إذن: $\frac{dw}{dt} = 0.05$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{w=64} = 150 \times \frac{2}{3}(64)^{-\frac{1}{3}}(0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3}\frac{1}{(64)^{\frac{1}{3}}}(0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}(0.05) = 1.25$$